

## 2.7.21 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici II

### Předpoklady: 2720

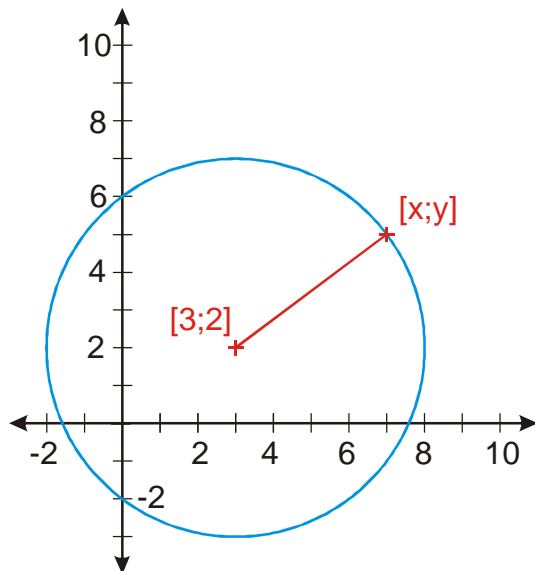
Soustavy s kvadratickou rovnicí se často vyskytují v analytické geometrii (náplň druhého pololetí třetího ročníku).

Typický příklad z analytické geometrie vypadá takto: Urči všechny body na přímce  $y = 4 - x$ , které mají od bodu  $[3; 2]$  vzdálenost 5.

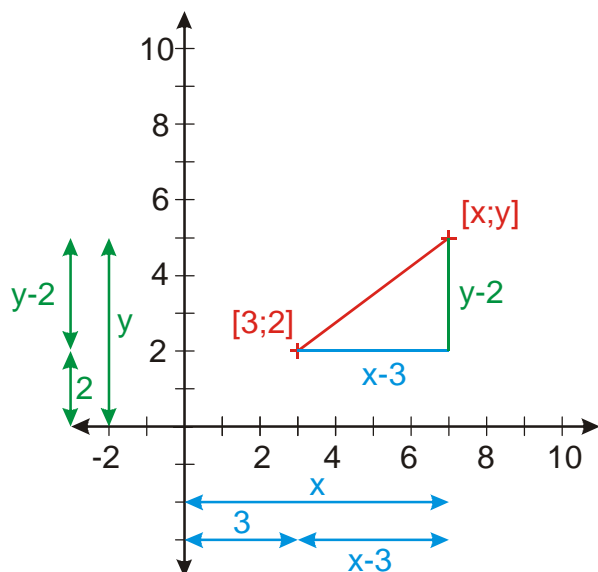
Každému geometrickému objektu odpovídá v analytické geometrii rovnice. Například body na přímce uvedené v zadání poznáme podle toho, že jejich souřadnice splňují rovnici  $y = 4 - x$ .

Pokud bod leží v průsečíku dvou objektů, musí splňovat obě rovnice  $\Rightarrow$  hledání průsečíků, pak přechází v řešení soustav rovnic.

Jak napíšeme: „vzdálenost od bodu  $[3; 2]$  je 5“?



Hledaná vzdálenost bodu  $X [x; y]$  od bodu je vyznačena červeně. Můžeme ji určit pomocí pravoúhlého trojúhelníku.



Z obrázku můžeme určit délky stran trojúhelníka a dosadit do Pythagorovy věty:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{dosadíme } c = 5, a = x - 3, b = y - 2)$$

$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5$  - tuto rovnici splňují všechny body modré kružnice na prvním obrázku (střed v bodě  $[3; 2]$ , poloměr 5), proto se používá jako rovnice kružnice (v umocněném tvaru na další řádce)

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 5 \quad /^2 \quad - \text{ můžeme, vše je kladné}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$y = 4 - x$$

Zbytek postupu je obsahem následujícího příkladu.

**Př. 1:** Vyřeš soustavu rovnic  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$   
 $y = 4 - x$

soustava rovnic, řešíme dosazením  $y = 4 - x$

$$(x-3)^2 + (4-x-2)^2 = 25$$

$$(x-3)^2 + (2-x)^2 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + (4 - 4x + x^2) = 25$$

$$2x^2 - 10x - 12 = 0 \quad /: 2$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x+1)(x-6) = 0$$

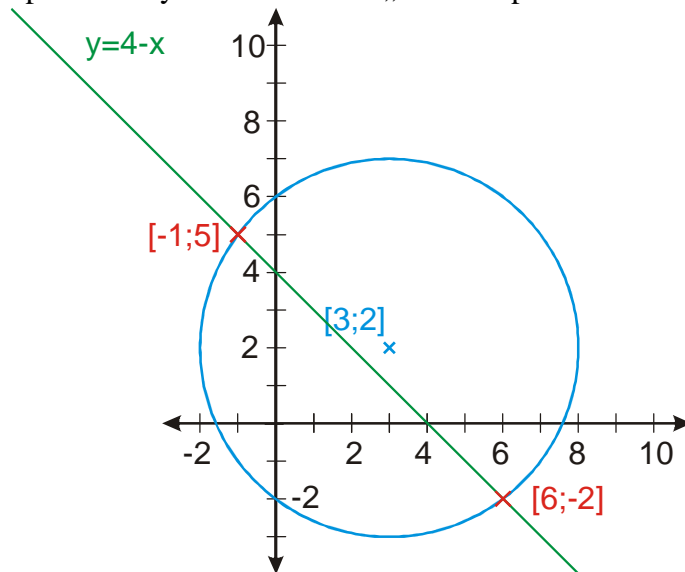
$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 4 - x_1 = 4 - (-1) = 5$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = 4 - x_2 = 4 - 6 = -2$$

$K = \{[-1, 5]; [6, -2]\}$   $\Rightarrow$  pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že na přímce

$y = 4 - x$  leží dva body  $[-1, 5]$  a  $[6, -2]$ , které mají od bodu  $[3; 2]$  vzdálenost 5.

**Dodatek:** Správnost výsledku můžeme „ověřit“ i pomocí obrázku:



**Pedagogická poznámka:** Následující příklad je uvedený jako BONUS, protože v podstatě nesouvisí s probíranou látkou a v daném okamžiku není důležité, aby jej řešili všichni. Rychlejší studenti si však mohou zkusit, jestli pochopili předchozí vysvětlování pořádně a dokáží ho použít i v jiném případě.

**Př. 2:** (BONUS) Najdi průsečík kružnic  $k_1$  ( $[0, 0]; r = 5$ ) a  $k_2$  ( $[-9, 9]; r = 13$ )

Dosadíme do rovnice přímky, která má již v předchozím příkladě zmiňovaný tvar

$(x - s_x)^2 + (y - s_y)^2 = r^2$ , kde  $[s_x; s_y]$  jsou souřadnice jejího středu a  $r$  její poloměr.

$$k_1 : (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

$$k_2 : (x - (-9))^2 + (y - 9)^2 = 13^2$$

Po úpravě získáme soustavu rovnic:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + 18x + 81 + y^2 - 18y + 81 = 169$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ \hline x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7 \end{array}, \text{ kterou řešíme v následujícím příkladu}$$

**Př. 3:** Vyřeš soustavu rovnic: 
$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7$$

V obou rovnicích jsou obě neznámé ve druhé mocnině  $\Rightarrow$  nelze dosazovat. Pomocí sčítací metody se můžeme v jedné z rovnic zbavit druhých mocnin:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\underline{[1] - [2]} \quad -18x + 18y = 18 \quad /:18$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$-x + y = 1$$

Teď už můžeme dosazovat – ze druhé rovnice  $y = x + 1$

$$x^2 + (x+1)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad /: 2$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$K = \{[-4; -3]; [3; 4]\} \Rightarrow$  pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že zadané kružnice se protnou v bodech  $[-4; -3]$  a  $[3; 4]$ .

**Poznámka:** Ještě elegantněji se mocnin v druhé rovnici zbavíme tím, že provedeme substituci a místo  $x^2 + y^2$  napíšeme díky rovnosti z první rovnice 25. Jde fakticky samozřejmě o to samé k čemu dospějeme sčítáním rovnic, ale vypadá to elegantněji.

**Př. 4:** Vyřeš soustavu rovnic:  $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2$        $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2$ .

Rovnice jsou ve složitém tvaru, nejdřív je upravíme:

1. rovnice:  $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2 \quad / \cdot (x+1)$       podmínka  $x \neq -1$

$$x + 2y + 3 = 2(x+1)$$

$$2y = x - 1$$

$$x - 2y = 1$$

2. rovnice:  $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2 \quad / \cdot (y+1)$       podmínka  $y \neq -1$

$$x + y + 2 = (x+2)(y+1)$$

$$x + y + 2 = xy + x + 2y + 2$$

$$xy + y = 0$$

Dosadíme z první rovnice do druhé:  $x - 2y = 1 \Rightarrow x = 2y + 1$

$$(2y+1)y + y = 0$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$y(y+1) = 0$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2y_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 2y_2 + 1 = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \quad - \text{ tato dvojice nevyhovuje podmínce } x \neq -1$$

$$K = \{[1; 0]\}$$

**Poznámka:** K řešení je možné dospět i rychleji z rovnice  $xy + y = 0$ . Úpravou na součinnový tvar získáme  $y(x+1) = 0 \Rightarrow x_2 = -1, y_1 = 0$ . Druhá čísla do dvojic dopočítáme.

Trochu riskantní je trik s dosazením  $x = 1 + 2y$  přímo do neupravené druhé rovnice:

$$\frac{x+y+2}{y+1} = \frac{2y+1+y+2}{y+1} = \frac{3y+3}{y+1} = \frac{3(y+1)}{y+1} = 3 = x+2 \Rightarrow x = 1$$
. Správné řešení zůstane, zdánlivé zmizí s vykrácením.

**Pedagogická poznámka:** Studenti samozřejmě poměrně často zapomínají na podmínky.

Pokud někdo najde způsob řešení uvedený v poznámce, snažím se ho motivovat k tomu, aby jej dotáhl do konce. Přijde mi matematicky zajímavější než klasické řešení, protože vyžaduje lepší představu o tom, která čísla k sobě do dvojice patří. Po vyřešení třídou si poznámku ukazujeme.

$$\begin{aligned} y + 2z &= 8 \\ \text{Př. 5:} \quad x - y + z &= 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \end{aligned}$$

Použijeme dosazovací metodu. Nejdříve z první rovnice vyjádříme  $y$  a dosadíme do zbývajících dvou:

$$y + 2z = 8 \Rightarrow y = 8 - 2z$$

$$y + 2z = 8$$

$$x - (8 - 2z) + z = 2$$

$$x^2 + (8 - 2z)^2 + z^2 = 14$$

$$y + 2z = 8$$

$$x - 8 + 3z = 2$$

$$x^2 + 64 - 32z + 4z^2 + z^2 = 14$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$x^2 + 5z^2 - 32z = -50$$

Z druhé rovnice vyjádříme  $x$  a dosadíme do třetí:

$$x + 3z = 10 \Rightarrow x = 10 - 3z$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$(10 - 3z)^2 + 5z^2 - 32z = -50$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$100 - 60z + 9z^2 + 5z^2 - 32z = -50$$

$$y + 2z = 8$$

$$x + 3z = 10$$

$$14z^2 - 92z + 150 = 0$$

Poslední rovnice obsahuje jedinou proměnnou. Řešíme jako kvadratickou rovnicí:

$$14z^2 - 92z + 150 = 0 \quad / : 2$$

$$7z^2 - 46z + 75 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-46) \pm \sqrt{(-46)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 75}}{2 \cdot 7} = \frac{46 \pm \sqrt{16}}{14} = \frac{46 \pm 4}{14}$$

$$z_1 = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

$$z_2 = \frac{42}{14} = 3$$

Dopočteme ostatní proměnné:

$$z_1 = \frac{25}{7}$$

$$x_1 = 10 - 3z_1 = 10 - 3 \cdot \frac{25}{7} = -\frac{5}{7}$$

$$y_1 = 8 - 2z_1 = 8 - 2 \cdot \frac{25}{7} = \frac{6}{7}$$

$$z_2 = 3$$

$$x_2 = 10 - 3z_2 = 10 - 3 \cdot 3 = 1$$

$$y_2 = 8 - 2z_2 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$$

$$K = \left\{ \left[ -\frac{5}{7}; \frac{6}{7}; \frac{25}{7} \right]; [1; 2; 3] \right\}$$

**Př. 6:** Petáková:  
strana 17/cvičení 33 d) e) g)

**Shrnutí:** Soustavy rovnic s kvadratickou rovnicí řešíme většinou dosazovací metodou. Sčítací metodu používáme na odstranění druhých mocnin z jedné z rovnic.