

2.7.23 Použití substituce při řešení soustav rovnic

Předpoklady: 2722

Pedagogická poznámka: Hodinu je možné pojmut dvěma způsoby:

Pokud budete řešit i slovní úlohy, je potřeba ještě polovina další vyučovací hodiny (zbytek pak můžete věnovat písemce).

Pokud slovní úlohy vynecháte, 45 minut bude stačit.

Pedagogická poznámka: Stejně jako ve všech ostatních příkladech s použitím substituce je třeba dát pozor, aby studenti nahradili všechny výskyty proměnné a pouze tehdy pokud jde opravdu o stejné výrazy.

Př. 1: Mistr s učněm opravují auto. Kdyby pracovali společně 5hodin, učedník by práci dodělal za 1hodinu. Kdyby pracovali společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě $\frac{1}{3}$ práce. Jak dlouho by auto opravoval každý sám?

mistr x hodin celá oprava \Rightarrow za jednu hodinu $\frac{1}{x}$

učeň y hodin celá oprava \Rightarrow za jednu hodinu $\frac{1}{y}$

sestavíme rovnice:

společně 5hodin učedník by práci dodělal za 1hodinu $\Rightarrow 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} = 1$

společně 2 hodiny a pak mistr ještě 3 hodiny sám, zbývalo by ještě $\frac{1}{3}$ práce

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{x} = 1 - \frac{1}{3}$$

získáváme soustavu:

$$5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} = 1$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{x} = 1 - \frac{1}{3}$$

Nevýhoda – obě neznámé ve jmenovateli \Rightarrow

Substituce: $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$5(a+b) + b = 1$$

$$2(a+b) + 3a = 1 - \frac{1}{3} \text{ . upravíme:}$$

$$5a + 6b = 1$$

$$5a + 2b = \frac{2}{3}$$

$$5a + 6b = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{[1]} - \text{[2]} \\ \hline 4b = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dopočteme } b: 4b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{12}$$

získáme a z první rovnice:

$$5a + 6 \cdot \frac{1}{12} = 1$$

$$5a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{10}$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{10} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 10$$

$$\frac{1}{y} = b = \frac{1}{12} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \Rightarrow y = 12$$

$$K = \{[10;12]\}$$

Mistr by provedl opravu za 10 hodin, učedník za 12.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad považuji za jeden ze svých největších pedagogických úspěchů. Ve třídě 4B2011 se přes to, že od poslední úlohy na společnou práci uplynulo přes dva měsíce a třída předvedla krátký výstup naprosté beznaděje a bezmoci, podařilo samostatně vyřešit úkol prakticky všem. Ono je snad možné naučit studenty řešit i slovní úlohy.

Př. 2: Káťa K. s Vojtou H. ze 4B2009 mažou za trest tabule na celé škole. Když budou mazat společně 25 minut, domaže Káťa zbytek za 5 minut. Když bude Vojta mazat 28 minut sám, dodělají trest společně za 12 minut. Za jak dlouho by všechny tabule smazal každý z nich sám.

$$\text{Káťa} \quad x \text{ minut celý trest} \Rightarrow \text{za jednu minutu } \frac{1}{x}$$

$$\text{Vojta} \quad y \text{ minut celý trest} \Rightarrow \text{za jednu minutu } \frac{1}{y}$$

vytvoření rovnic:

$$\text{společně 25 minut domaže Káťa zbytek za 5 minut: } 25 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{5}{x} = 1$$

$$\text{Vojta mazat 28 minut a dodělají trest společně za 12 minut: } 12 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{28}{y} = 1$$

Substitute: $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$25(a+b) + 5a = 1$$

$$12(a+b) + 28b = 1$$

$$\hline 30a + 25b = 1$$

$$\hline 12a + 40b = 1$$

z 2. rovnice si vyjádříme a a dosadíme do první:

$$12a + 40b = 1 \Rightarrow a = \frac{1 - 40b}{12}$$

$$30 \frac{1 - 40b}{12} + 25b = 1$$

$$15 - 600b + 150b = 6$$

$$450b = 9$$

$$b = \frac{1}{50}$$

$$a = \frac{1 - 40 \cdot \frac{1}{50}}{12} = \frac{\frac{1}{5}}{12} = \frac{1}{60}$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{60} \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{60} \Rightarrow x = 60$$

$$\frac{1}{y} = b = \frac{1}{50} \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{50} \Rightarrow y = 50$$

$$K = \{[60; 50]\}$$

Káťa by sama smazala všechny tabule za 60 minut, Vojta by to stihnul za 50 minut.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$$

Soustavu bychom mohli řešit klasicky – odečtení rovnic a dosazováním. Přítomnost druhých mocnin však situaci komplikuje.

Substitute: soustava obsahuje pouze x^2 a y^2 , substitucí se zbavíme druhých mocnin:

$$x^2 = a, \quad y^2 = b \Rightarrow \text{Řešíme soustavu:}$$

$$a + b = 61$$

$$a - b = 11$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \qquad a + b = 61$$

$$[[1]] + [[2]] \qquad 2a = 72$$

$$a = 36$$

$$\text{Dopočteme } b: a + b = 61 \Rightarrow 36 + b = 61$$

$$b = 25$$

Návrat k původní proměnné:

$$x^2 = a = 36 \qquad x^2 - 36 = 0$$

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = -6$$

$$y^2 = b = 25 \qquad y^2 - 25 = 0$$

$$(y - 5)(y + 5) = 0$$

$$y_1 = 5 \qquad y_2 = -5$$

Zbývá sestavit dvojice, obě hodnoty x i y jsme získali z jedné dvojice $a, b \Rightarrow$ mohou kombinovat všechna x se všemi y

$$K = \{[-6; -5]; [-6; 5]; [6; -5]; [6; 5]\}$$

Pedagogická poznámka: Kromě toho, že někteří studenti řeší na konci kvadratické rovnice $x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$, bývá občas problém s tím, aby studenti sestavili všechny dvojice do řešení.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ x^2 + 2y &= 10 \end{aligned}$$

Substitute: soustava obsahuje pouze x^2 ale y se vyskytuje v první i druhé mocnině, substitucí se zbavíme pouze druhé mocniny x : $x^2 = a \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$a + y^2 = 13$$

$$a + 2y = 10$$

z druhé rovnice si vyjádříme a a dosadíme do první rovnice:

$$a + 2y = 10 \Rightarrow a = 10 - 2y$$

$$(10 - 2y) + y^2 = 13$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y + 1)(y - 3) = 0$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow a_1 = 10 - 2y = 10 - 2 \cdot (-1) = 12$$

$$y_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 10 - 2y = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

Návrat k původní proměnné:

z dvojice $a_1 = 12$, $y_1 = -1$

$$x^2 = a = 12$$

$$x^2 - 12 = 0$$

$$(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{12}$$

$$x_2 = -\sqrt{12}$$

Tedy dvojice řešení $[\sqrt{12}; -1]$ a $[-\sqrt{12}; -1]$

z dvojice $a_2 = 4$, $y_2 = 3$

$$x^2 = a = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Tedy dvojice řešení $[2; 3]$ a $[-2; 3]$

Dvojice x a y už jsou sestaveny, nemůžeme vytvořit dvojici $[\sqrt{12}; 3]$, protože $\sqrt{12}$ jsme získali k jiné hodnotě y .

$$K = \{[\sqrt{12}; -1]; [-\sqrt{12}; -1]; [2; 3]; [-2; 3]\}$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti jsou trochu nespřízniví z toho, že substituuji pouze jednu proměnnou a druhá zůstává nezměněná.

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-1} + 2\frac{y}{y+1} &= 7 \\ \frac{4x}{x-1} - \frac{y}{y+1} &= 2 \end{aligned}$$

Podmínky: $x \neq 1$, $y \neq -1$

Substitute: $\frac{x}{x-1} = a, \frac{y}{y+1} = b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$3a + 2b = 7$$

$$4a - b = 2$$

z druhé rovnice si vyjádříme b a dosadíme do první rovnice: $4a - b = 2 \Rightarrow b = 4a - 2$

$$3a + 2(4a - 2) = 7$$

$$3a + 8a - 4 = 7$$

$$11a = 11$$

$$a = 1$$

$$b = 4a - 2 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x}{x-1} = a = 1$$

$$\frac{x}{x-1} = 1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$x = x - 1$$

$0 = -1$ - nemůžeme najít žádné $x \Rightarrow$ soustava nemá řešení, nemá cenu dopočítávat y

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: V předchozím i následujícím příkladě je důležité, aby studenti pochopili, že hledají uspořádanou dvojici čísel a jakmile je jasné, že jedno z nich není možné najít, že další řešení zbytečné. Poměrně malé procento studentů má problémy se substituováním levého zlomku, kvůli rozdílným číslům v čitatelích.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic

$$\frac{2(x-1)}{y+1} - \frac{3(y+2)}{x-1} = 3$$

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{2(y+2)}{x-1} = -2$$

Podmínky: $x \neq 1, y \neq -1$

Substitute: můžeme klidně substituovat i výraz, který obsahuje dvě proměnné: $\frac{x-1}{y+1} = a,$

$\frac{y+2}{x-1} = b \Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$2a - 3b = 3$$

$$a + 2b = -2$$

$$2a - 3b = 3$$

$$\underline{[1] - 2 \cdot [2]} \quad -7b = 7$$

$$b = -1$$

$$2a - 3b = 3 \Rightarrow 2a - 3 \cdot (-1) = 3$$

$$a = 0$$

Návrat k původní proměnné:

$$\frac{x-1}{y+1} = a = 0$$

$$\frac{y+2}{x-1} = b = -1$$

Opět získáváme soustavu rovnic:

$$\frac{x-1}{y+1} = 0$$

$$\frac{y+2}{x-1} = -1$$

Rovnice upravíme:

$$\frac{x-1}{y+1} = 0 \quad / \cdot (y+1)$$

$$\frac{y+2}{x-1} = -1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$x-1 = 0$$

$$y+2 = 1-x$$

Z první rovnice vyjádříme x : $x = 1$, dosadíme do druhé:

$$y+2 = 1-1$$

$$y = -2$$

Zdá se, že řešením je dvojice čísel $[1; -2]$, ale tato dvojice nevyhovuje podmínce: $x \neq 1$.

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti se potřebují ujistit, že je možné substituovat výraz, ve kterém se vyskytují dvě neznámé. Další rozpaky se objevují, když při návratu k původním proměnným vznikne opět soustava rovnic.

Př. 7: Petáková:

strana 17/cvičení 34 c) d)

strana 17/cvičení 35 b)

strana 17/cvičení 36 a) b)

strana 17/cvičení 37 b) c) d)

Shrnutí: Substituci můžeme používat i při řešení soustav rovnic k nahrazení jedné nebo více neznámých.