2.7.25 Použití substituce pro řešení nerovnic II

Předpoklady: 2722, 2723, 2724

Pedagogická poznámka: Platí to samé, co pro předchozí hodinu. Skvělé cvičení na orientaci v příkladu, přehledný zápis a schopnost řešit podpříklady. V tomto směru jedna z nejtěžších hodin v celém studiu.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sqrt{\left(x^2+3x\right)^2+2}<x^2+3x+2$.

Po umocnění by nerovnice obsahovala x^4, ale vhodnou substitucí stupeň mocniny *x* snížíme.

Substituce: použijeme $y=x^2+3x \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $\sqrt{y^2+2}<y+2$, použijeme metodu nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice (místa přetržení)

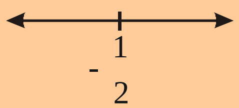
levá strana: odmocnina $y^2+2\geq 0$, platí vždy, protože $y^2\geq 0$ - neexistují žádné body přetržení

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{y^2+2}=y+2$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu *x*.

$$\sqrt{y^2+2}=y+2 \qquad /^2$$
$$\left(\sqrt{y^2+2}\right)^2=(y+2)^2$$
$$y^2+2=y^2+4y+4$$
$$4y=-2$$
$$y=-\frac{1}{2}$$

Zkouška: $y=-\frac{1}{2}$

$$L=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2}=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$
$$P=y+2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$
$$L=P$$

Zakreslíme získaný kořen na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

interval $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$: vybereme číslo například -1:

$\sqrt{y^2+2}<y+2$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{(-1)^2+2}<-1+2$

$\sqrt{3}<1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ není řešením

interval $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$: vybereme číslo například 0:

$\sqrt{y^2+2}<y+2$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{0^2+2}<0+2$

$\sqrt{2}<2$ - platí $\Rightarrow$ interval $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$ je řešením

$y\in\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

Návrat k původní proměnné:

$x^2+3x=y\in\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

Přepíšu interval hodnot x^2+3x pomocí nerovnice:

$x^2+3x=y>-\frac{1}{2}$ - řešíme nerovnici $x^2+3x>-\frac{1}{2}$

$x^2+3x>-\frac{1}{2} \quad /\cdot 2$

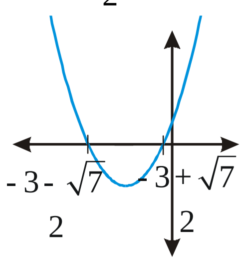
$2x^2+6x+1>0$

Zjistíme průsečíky s osou *x*:

$2x^2+6x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{4}=\frac{-6\pm 2\sqrt{7}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$$

$x_1=\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ $\qquad$ $x_1=\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$



hledám body nad osou *x*

$K=\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Substituovanou rovnici je možné řešit také umocňováním (dělá to tak většina studentů), v tom případě pak je nutné trvat na rozboru znamének obou stran nerovnice.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $(u-2)^2 - 3|u-2| + 2 < 0$.

Substituce: $x = (u-2)$ by moc nepomohlo, ale číslo $(u-2)^2$ je vždy kladné stejně jako číslo $|u-2|^2$ (je jedno, jestli znaménko zmizí kvůli absolutní hodnotě nebo kvůli umocnění), platí tedy $(u-2)^2 = |u-2|^2$, nerovnici můžeme napsat $|u-2|^2 - 3|u-2| + 2 < 0$, použijeme substituci

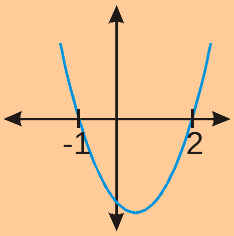
$x = |u-2| \Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 1$



Hledáme body pod osou $x \Rightarrow x \in (1;2)$

Návrat k původní proměnné:

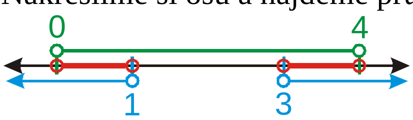
$|u-2| = x \in (1;2)$

Přepíšeme interval hodnot $|u-2|$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2">$|u-2| \in (1;2) \Leftrightarrow |u-2| > 1$ a zároveň $|u-2| < 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení</td></tr>
<tr><td>$|u-2| > 1$
Zjistíme, kdy je vnitřek absolutní hodnoty roven nule: $u-2=0 \Rightarrow u=2$ a rozdělíme na intervaly podle znaménka vnitřku:
$u \in (-\infty;2\rangle \Rightarrow u-2 \le 0 \Rightarrow |u-2| = -u+2$
$-u+2 > 1$
$1 > u$
$u \in \langle 2;\infty) \Rightarrow u-2 \ge 0 \Rightarrow |u-2| = u-2$
$u-2 > 1$
$u > 3$
$K_1 = (-\infty;1) \cup (3;\infty)$</td><td>$|u-2| < 2$
Zjistíme, kdy je vnitřek absolutní hodnoty roven nule: $u-2=0 \Rightarrow u=2$ a rozdělíme na intervaly podle znaménka vnitřku:
$u \in (-\infty;2\rangle \Rightarrow u-2 \le 0 \Rightarrow |u-2| = -u+2$
$-u+2 < 2$
$0 < u$
$u \in \langle 2;\infty) \Rightarrow u-2 \ge 0 \Rightarrow |u-2| = u-2$
$u-2 < 2$
$u < 4$
$K_2 = (0;4)$</td></tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_1 = (-\infty;1) \cup (3;\infty)$ a $K_2 = (0;4)$ (*u* musí splňovat obě podmínky).

Nakreslíme si osu a najdeme průnik:



$K = K_1 \cap K_2 = (0;1) \cup (3;4)$

Poznámka: Dopočítávání příkladu by se dalo zrychlit použitím definice absolutní hodnoty:

$\lvert u-2\rvert>1$ Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose $\Rightarrow$ hledám čísla jejich obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny více než o jeden. $K_1=(-\infty;1)\cup(3;\infty)$	$\lvert u-2\rvert<2$ Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel znamená vzdálenost jejich obrazu na číselné ose $\Rightarrow$ hledám čísla jejich obrazy jsou od obrazu 2 vzdáleny méně než o dva. $K_2=(0;4)$

Pedagogická poznámka: Substituce u předchozího příkladu není samozřejmá a pokud si ji studenti nepamatují, budou potřebovat Vaši pomoc.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-7\frac{x+1}{x-1}+12\geq 0$.

podmínka $x\neq 1$,

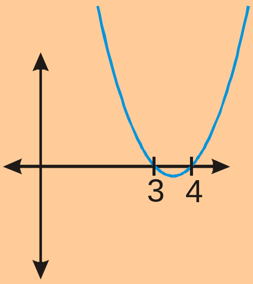
Substituce: $y=\frac{x+1}{x-1}$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2-7y+12\geq 0$.

Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*:

$y^2-7y+12=0$

$(y-3)(y-4)=0$

$y_1=3$ $\qquad$ $y_2=4$



hledáme body nad osou *x*

$y\in(-\infty;3\rangle\cup\langle 4;\infty)$

Návrat k původní proměnné:

$\frac{x+1}{x-1}=y\in(-\infty;3\rangle\cup\langle 4;\infty)$

Přepíšeme intervaly hodnot $\frac{x+1}{x-1}$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2">$\frac{x+1}{x-1}\in(-\infty;3\rangle\cup\langle 4;\infty)\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}\leq 3$ nebo $\frac{x+1}{x-1}\geq 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, protože stačí, když platí jedna z nich, konečný výsledek získáme jako sjednocení jejich řešení.</td></tr>
<tr><td>$\frac{x+1}{x-1}\leq 3$
$\frac{x+1}{x-1}\leq 3$ $\quad /\cdot(x-1)$ výraz, kterým násobíme</td><td>$\frac{x+1}{x-1}\geq 4$
$\frac{x+1}{x-1}\geq 4$ $\quad /\cdot(x-1)$ výraz, kterým násobíme</td></tr>
</table>

může být kladný i záporný $\Rightarrow$ rozdělíme R na intervaly podle znaménka výrazu, abychom věděli, zda obracet znaménko: $x \in (-\infty;1) \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti: $x+1 \geq 3(x-1)$ $x+1 \geq 3x-3$ $4 \geq 2x$ $2 \geq x$ $K_{11} = (-\infty;1)$ $x \in (1;\infty) \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme: $x+1 \leq 3(x-1)$ $x+1 \leq 3x-3$ $4 \leq 2x$ $2 \leq x$ $K_{12} = \left\langle 2;\infty \right)$ $K_1 = (-\infty;1) \cup \left\langle 2;\infty \right)$	může být kladný i záporný $\Rightarrow$ rozdělíme R na intervaly podle znaménka výrazu, abychom věděli, zda obracet znaménko: $x \in (-\infty;1) \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow$ násobíme záporným číslem a obracíme znaménko nerovnosti: $x+1 \leq 4(x-1)$ $x+1 \leq 4x-4$ $5 \leq 3x$ $\frac{5}{3} \leq x$ $K_{21} = \emptyset$ $x \in (1;\infty) \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow$ násobíme kladným číslem a znaménko nerovnosti neměníme: $x+1 \geq 4(x-1)$ $x+1 \geq 4x-4$ $5 \geq 3x$ $\frac{5}{3} \geq x$ $K_{22} = \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle$ $K_2 = \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle$

Hledáme sjednocení množin $K_1 = (-\infty;1) \cup \left\langle 2;\infty \right)$ a $K_2 = \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle$

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty;1) \cup \left(1;\frac{5}{3}\right\rangle \cup \left\langle 2;\infty \right)$$

Shrnutí: Někdy je nejdůležitější neztratit se.