

2.8.1 Lineární rovnice s parametrem I

Předpoklady: 2203

Pedagogická poznámka: Úvodní příklad je možné vynechat, tím ušetříte skoro 30 minut času, ale hodina ztratí velkou část svého kouzla. Příklad sice není z matematického hlediska příliš zajímavý (kvadratická závislost by určitě byla zajímavější), ale poměrně věrně kopíruje reálné rozhodování v podobných situacích. I z hlediska úvodní úlohy k parametrickým rovnicím je poměrně vhodný, protože je nutné sestavené výrazy upravovat.

Studenti na něj poměrně dobře reagují a diskutují o reálnosti zadání (zejména plat dělníků jim přijde vysoký).

Př. 1: Stavební podnikatel má se svojí firmou vykonat stavební práce v rozsahu 10 000 hodin. Za provedení stavby dostane po odečtení nákladů na materiál 4 000 000. Na stavbě bude pracovat 10 dělníků 8 hodin denně za hodinovou mzdu 150 Kč. Pronájem stavebních strojů, vybavení, zajištění staveniště a další nutné výdaje stojí 20000 denně. Dělníci můžou pracovat na přesčasech, v tomto případě jim podnikatel musí vyplácet vyšší hodinovou mzdu 250 Kč. Urči kolik peněz podnikatel vydělá v závislosti na tom, když dělníci budou pracovat 0, 1, 2, 3, 4 hodiny přesčasů denně.

Podnikatelův zisk = 4 000 000 - platby za stroje – mzdy – mzdy na přesčasy

Jak to udělat, abychom nemuseli počítat příklad pětkrát? Spočteme ho s jednou hodinou přesčasů, ve všech výrazech budeme jedničku nechávat, označíme si ji podtržením a na konci ji pak vyměníme za jiná čísla.

Podtržená jednička = hodina přesčasů denně

Určíme počet dní stavby n :

hodiny k odpracování = počet dělníků · (denní pracovní doba + přesčasy) · počet dní

$$10000 = 10 \cdot (8 + \underline{1}) \cdot n$$

$$n = \frac{10000}{10(8 + \underline{1})} = \frac{1000}{(8 + \underline{1})}$$

podnikatelův zisk = 4 000 000 - platby za stroje – mzdy – mzdy na přesčasy

$$x = 4000000 - 20000 \cdot n - n \cdot 10 \cdot 8 \cdot 150 - n \cdot 10 \cdot \underline{1} \cdot 250$$

$$x = 4000000 - n(20000 + 10 \cdot 8 \cdot 150 + 10 \cdot \underline{1} \cdot 250)$$

$$x = 4000000 - n(20000 + 12000 + \underline{1} \cdot 2500)$$

$$x = 4000000 - n(32000 + \underline{1} \cdot 2500)$$

$$\text{Dosadíme za počet dní: } n = \frac{1000}{(8 + \underline{1})}$$

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8 + \underline{1})}(32000 + \underline{1} \cdot 2500)$$

Víc už výraz upravovat nemůžeme, pokud nechceme ztratit informaci, které číslo znamená počet přesčasových hodin.

-----1h přesčasy

Spočteme zisk podnikatele, když budou dělníci pracovat 1 hodinu přesčasů denně.

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+1)}(32000 + 1 \cdot 2500) \doteq 167000$$

Pokud budou dělníci pracovat 1 hodinu přesčasů denně podnikatel dosáhne zisku 167000 Kč.

-----2 h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+2)}(32000 + 2 \cdot 2500) = 300000$$

Stejně spočítáme i všechny další možnosti:

-----3h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+3)}(32000 + 3 \cdot 2500) \doteq 409000$$

-----4h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+4)}(32000 + 4 \cdot 2500) = 500000$$

-----0h přesčasy

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8+0)}(32000 + 0 \cdot 2500) \doteq 0$$

Největšího zisku 500000 dosáhne podnikatel v případě, že dělníci budou pracovat 4 hodiny přesčasů denně.

Nejtěžší bylo spočítat příklad poprvé pro jednu hodinu přesčasů denně. Díky tomu, že jsme jedničku označili a nezapočítali jsme ji do žádného výrazu, jsme pro další možnosti pouze dosazovali do odvozeného vztahu.

$$x = 4000000 - \frac{1000}{(8 + \underline{1})}(32000 + \underline{1} \cdot 2500)$$

Abychom lépe zdůraznili, že číslo jedna hraje ve vztahu zvláštní roli napíšeme místo ní písmeno p , které znamená počet přesčasových hodin.

Rovnici $x = 4000000 - \frac{1000}{8+p} \cdot (32000 + 2500 \cdot p)$ nazýváme rovnice s parametrem.

Rovnice s parametrem je rovnice, která obsahuje písmenko (parametr), za které můžeme dosazovat různá čísla (v našem případě $p = 0, 1, 2, 3, 4$). Rovnici řešíme pouze jednou s parametrem, výsledky získáváme dosazováním konkrétních hodnot za parametr. Řešíme tak více rovnic najednou (v našem případě 5) a šetříme čas.

Při řešení rovnic s parametrem postupujeme úplně stejně jako při řešení rovnic bez parametru s jediným rozdílem, při každé úpravě s parametrem, se musíme ujistit, zda je možné ji provést se všemi čísly, které budeme za parametr dosazovat.

Dodatek: I když použití parametrické rovnice podstatně ulehčuje rozvahu v předchozím příkladu, využití tabulkových procesorů skýtá daleko větší možnosti. Ukázka řešení naší situaci je v souboru „stavebni_podnikatel.xls“.

Pedagogická poznámka: Použití podtržené jedničky je nutné studentům podstrčit, některé napadne rovnou použít písmenko. V takém případě jim nebráním, ale s většinou třídy je lepší použít podtrženou jedničku, která je jim bližší a nečiní jim takové problémy při upravování. Příklad řeším s malým zpožděním se studenty na tabuli.

Př. 2: Vyřeš rovnici $x(p+2)+3=p(x+1)$ s neznámou x a parametrem p .

$x(p+2)+3=p(x+1)$ - roznásobíme závorky, jde se všemi čísly, nic zvláštního.

$xp+2x+3=px+p$ $-px$ - odečítáme výraz s parametrem, jde se všemi čísly, nic zvláštního.

$$2x+3=p$$

$$2x=p-3$$

$$x = \frac{p-3}{2} \quad K = \left\{ \frac{p-3}{2} \right\}$$

Na konci řešení rovnice s parametrem vždy uvádíme přehled řešitelnosti rovnice v závislosti na hodnotách parametru. Řešení naší rovnice je stejné bez ohledu na hodnotu parametru, přehled bude mít jedinou řádku:

Hodnoty parametru p :

$$p \in R$$

Řešení pro x :

$$K = \left\{ \frac{p-3}{2} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Z hlediska řešení parametrických rovnic není příklad zajímavý, protože se řešení nevětví, ale jeho zařazení považuji za vhodné, protože pomáhá překonat strach z dalšího písmenka, které se v rovnici vyskytuje.

Př. 3: Vyřeš rovnici $2xp+p(x+1)=3p-4+2x$ s neznámou x a parametrem p .

$$2xp+p(x+1)=3p-4+2x$$

$$2xp+xp+p=3p-4+2x$$

$$3xp-2x=2p-4$$

$$x(3p-2)=2p-4$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $3p-2$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou.

\Rightarrow Zjistíme, zda je výraz $3p-2$ někdy roven nule: $3p-2=0 \Rightarrow p=\frac{2}{3}$. Pokud chceme

dělit, musíme $p=\frac{2}{3}$ vyloučit, abychom nedělili nulou.

\Rightarrow **rozvětvení**

Když $p \neq \frac{2}{3}$, můžeme vydělit rovnici výrazem $3p-2$, protože se určitě nebude rovnat nule:

Když $p = \frac{2}{3}$ nemůžeme vydělit rovnici výrazem $3p-2$, ale víme, které konkrétní p nás zajímá a můžeme ho dosadit \Rightarrow

$$x(3p-2) = 2p-4 \quad /:(3p-2)$$

$$x = \frac{2p-4}{3p-2} \quad K = \left\{ \frac{2p-4}{3p-2} \right\}$$

nás zajímá a můžeme ho dosadit \Rightarrow

$$x \left(3 \frac{2}{3} - 2 \right) = 2 \frac{2}{3} - 4$$

$$x \cdot 0 = \frac{4}{3} - 4$$

$$0 = -\frac{8}{3} \Rightarrow \text{pro } p = \frac{2}{3} \text{ nemá rovnice řešení}$$

$$\Rightarrow K = \emptyset$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$p \neq \frac{2}{3}$	$K = \left\{ \frac{2p-4}{3p-2} \right\}$
$p = \frac{2}{3}$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: U velké většiny studentů rozhoduje o úspěchu při řešení parametrických rovnic to, zda si udrží přehled nad příkladem a neztratí orientaci v tom, co a proč vlastně počítají. Pro udržení této orientace je přehledný zápis strašně důležitý a proto se snažím trvat na tom, aby rozvětvení příkladu zapisovali vedle sebe do sloupců, stejně jak to dělám v učebnici (pokud nejsou větve tři, což by znamenalo příliš úzké sloupce).

Pedagogická poznámka: Studenti v naprosté většině považují dosazování hodnoty $p = \frac{2}{3}$ do tvaru rovnice před dělením za zbytečné a automaticky píšou pro $p = \frac{2}{3}$ jako výsledek $K = \emptyset$. O omylu je přesvědčí až příklady z další hodiny.

Shrnutí: Rovnice s parametrem řešíme stejně jako rovnice bez parametru, pouze v okamžiku, kdy provádíme operace, které není možné provést se všemi čísly, rozebereme možné hodnoty parametru a případně rozdělíme řešení.