

2.8.3 Lineární rovnice s parametrem III

Předpoklady: 2802

Pedagogická poznámka: Hned na začátku prvního příkladu se dohodneme, že příklady se zlomky se příliš neliší od předchozích. Jediný rozdíl je v tom, že na začátku musíme zapsat podmínky a na konci (kdy už víme, jak vypadá pro jednotlivé hodnoty parametru řešení) zkontrolovat jejich platnost. Naprostá většina problémů pramení z toho, že studenti si zapíší příklad nepřehledně a přestanou se orientovat v tom, co vlastně vyšlo a pro co mají kontrolovat podmínky.

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{t}{x-2} = \frac{2}{x-t}$ s neznámou x a parametrem t .

$\frac{t}{x-2} = \frac{2}{x-t}$ - rovnice obsahuje zlomky, ještě před začátkem výpočtu musíme napsat

podmínky: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$x-t \neq 0 \Rightarrow x \neq t$

Ještě nevíme, co to přesně znamená, protože neznáme výsledky. Až je budeme znát musíme podmínky zkontrolovat. Teď už můžeme násobit a zlikvidovat zlomky.

$$\frac{t}{x-2} = \frac{2}{x-t} \quad / \cdot (x-2)(x-t)$$

$$t(x-t) = 2(x-2)$$

$$xt - t^2 = 2x - 4$$

$$xt - 2x = t^2 - 4$$

$$x(t-2) = (t-2)(t+2)$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(t-2)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $(t-2)$ roven nule: $(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2$. Pokud chceme dělit, musíme dvojku vyloučit.

\Rightarrow **rozvětvení**

$t \neq 2 \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(t-2)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(t-2) = (t-2)(t+2) \quad / : (t-2)$$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{t-2}$$

$$x = t+2 \quad K = \{t+2\}$$

Kontrola podmínek:

Podmínka: $x \neq t$, hodnota x se nesmí rovnat aktuální hodnotě $t \Rightarrow$ Zjistíme, kdy se to rovná, a vyloučíme takové t .

$$\text{Hledáme } x = t+2 = t$$

$$t+2 = t$$

$$2 = 0 - \text{nenastane nikdy.}$$

Podmínka $x \neq 2$. Zjistíme pro které t by se x rovnalo 2.

$t = 2 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x(2-2) = (2-2)(2+2)$$

$$x \cdot 0 = 0$$

\Rightarrow můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow K = R$,

Kontrola podmínek:

Podmínka: $x \neq t$, platí $2 = t \neq x \Rightarrow x \neq 2. \Rightarrow$

$$K = R - \{2\}$$

Podmínka: $x \neq 2 \Rightarrow K = R - \{2\}$ (obě podmínky vylučují stejnou hodnotu x).

$$x = t + 2 = 2$$

$$t + 2 = 2$$

$t = 0$ - teď vznikla nová řádka do závěrečného přehledu. Když bude parametr $t = 0$, můžeme vypočítat x způsobem pro $t \neq 2$, ze vztahu $x = t + 2$, ale vyjde hodnota zakázaná podmínkou na začátku příkladu. $x = t + 2 = 0 + 2 = 2$, ale má platit $x \neq 2$. Pro $t = 0$ tedy nemáme žádné správné řešení.

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$t \neq 2; 0$	$K = \{t + 2\}$
$t = 0$	$K = \emptyset$
$t = 2$	$K = R - \{2\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\frac{3x}{x+2} = \frac{t}{t-1}$ s neznámou x a parametrem t .

$\frac{3x}{x+2} = \frac{t}{t-1}$ Rovnice obsahuje zlomky, ještě před začátkem výpočtu musíme napsat

podmínky: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ $t - 1 \neq 0 \Rightarrow t \neq 1$

Ještě nevíme, co přesně znamená první podmínka, protože neznáme výsledky, až je budeme znát, musíme podmínku zkontrolovat.

Druhá podmínka znamená, že pro $t = 1$, rovnici nebudeme vůbec řešit a tedy $K = \emptyset$.

Teď už můžeme násobit a zlikvidovat zlomky.

$$\frac{3x}{x+2} = \frac{t}{t-1} \quad / \cdot (x+2)(t-1)$$

$$3x(t-1) = t(x+2)$$

$$3tx - 3x = tx + 2t$$

$$2tx - 3x = 2t$$

$$x(2t-3) = 2t$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(2t-3)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $(2t-3)$

roven nule: $(2t-3) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$. Pokud chceme dělit, musíme $\frac{3}{2}$ vyloučit.

\Rightarrow **rozvětvení.**

$t \neq 1; \frac{3}{2} \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem

$(2t-3)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(2t-3) = 2t \quad / : (2t-3)$$

$$x = \frac{2t}{2t-3} \quad K = \left\{ \frac{2t}{2t-3} \right\}$$

Kontrola podmínek:

Podmínka $x \neq -2$. Zjistíme pro které t by se x rovnalo -2 .

$t = \frac{3}{2} \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 3 \right) = 2 \cdot \frac{3}{2}$$

$x \cdot 0 = 3$ neplatí nikdy $\Rightarrow K = \emptyset$ (stejný výsledek jako pro $t = 1$)

Kontrola podmínek:

nemá smysl, když nemáme žádné řešení

$$x = \frac{2t}{2t-3} = -2$$

$$\frac{2t}{2t-3} = -2 \quad / \cdot (2t-3)$$

$$2t = -2(2t-3)$$

$$2t = -4t + 6$$

$$6t = 6$$

$t = 1$ - teď jsme získali další hodnotu parametru, pro který rovnice nemá řešení. Tato hodnota je shodná s hodnotou parametru, kterou jsme vyloučili už na začátku příkladu při stanovení podmínek pro odstraňování zlomků.

$$t = 1 \Rightarrow K = \emptyset \quad (\text{zjištěno už podruhé})$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$t \neq 1; \frac{3}{2}$	$K = \left\{ \frac{2t}{2t-3} \right\}$
$t = 1; \frac{3}{2}$	$K = \emptyset$

Dodatek: To, že z podmínky pro t na pravé straně vyplývá stejná hodnota parametru t jako z podmínky pro x na levé straně není náhoda. Vyjde to stejně pro všechny rovnice ve tvaru $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{At+B}{Ct+D}$. Zdůvodnění můžete nechat jako bonusový úkol pro nejlepší studenty.

Na rovnici $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{At+B}{Ct+D}$ se můžeme dívat jako na rovnost předpisů dvou lineárních lomených funkcí. Obě mají být stejné (o čemž se můžeme přesvědčit dosažením výrazu pro x do levé strany rovnice, po úpravě získáme stejný výraz jako na pravé straně), musí mít stejnou i hodnotu, pro kterou nejsou definované, což je přesně hodnota vyloučeného parametru t .

Př. 3: Vyřeš rovnici $\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1} = t+1$ s neznámou x a parametrem t .

$$\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1} = t+1 \quad \text{Rovnice obsahuje zlomky, ještě před začátkem výpočtu musíme}$$

napsat podmínky: $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Ještě nevíme, co to přesně znamená podmínka, protože neznáme výsledky. Až je budeme znát musíme podmínku zkontrolovat.

Teď už můžeme násobit a zlikvidovat zlomky.

$$\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1} = t+1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$(2x-1)(2t-2) = (t+1)(x-1)$$

$$4tx - 4x - 2t + 2 = tx - t + x - 1$$

$$3tx - 5x = t - 3$$

$$x(3t - 5) = t - 3$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(3t - 5)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow kdy je výraz $(3t - 5)$

roven nule: $(3t - 5) = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$. Pokud chceme dělit, musíme $\frac{5}{3}$ vyloučit.

\Rightarrow **rozvětvení**

$t \neq \frac{5}{3} \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem

$(3t - 5)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(3t - 5) = t - 3 \quad / : (3t - 5)$$

$$x = \frac{t - 3}{3t - 5} \quad K = \left\{ \frac{t - 3}{3t - 5} \right\}$$

Kontrola podmínek:

Podmínka $x \neq 1$. Zjistíme pro které t by se x rovnalo 1.

$$x = \frac{t - 3}{3t - 5} = 1$$

$$\frac{t - 3}{3t - 5} = 1 \quad / \cdot (3t - 5)$$

$$t - 3 = 3t - 5$$

$$2 = 2t$$

$t = 1$ Teď jsme získali hodnotu parametru, pro který rovnice nemá řešení.

$$t = 1 \Rightarrow K = \emptyset \quad (\text{zjištěno už podruhé})$$

$t = \frac{5}{3} \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x \left(3 \frac{5}{3} - 5 \right) = \frac{5}{3} - 3$$

$$x(5 - 5) = -\frac{4}{3}$$

$x \cdot 0 = -\frac{4}{3}$ neplatí nikdy $\Rightarrow K = \emptyset$ (stejný výsledek jako pro $t = 1$)

Kontrola podmínek:

Nemá smysl, když nemáme žádné řešení.

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

$$t \neq 1; \frac{5}{3}$$

$$t = 1; \frac{5}{3}$$

Řešení pro x :

$$K = \left\{ \frac{t - 3}{3t - 5} \right\}$$

$$K = \emptyset$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $xp^2 + 4xq^2 = p^2 - 4q^2$ s neznámou x a parametry p a q .

$$xp^2 + 4xq^2 = p^2 - 4q^2$$

$$x(p^2 + 4q^2) = p^2 - 4q^2$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p^2 + 4q^2)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou. \Rightarrow Zjistíme, zda je výraz $(p^2 + 4q^2)$ někdy roven nule. Jde o součet druhých mocnin

(tedy nezáporných čísel) \Rightarrow je nula pouze, když jsou obě čísla nulová. Pokud chceme dělit, musíme vyloučit možnosti $(p; q) = (0; 0)$, abychom nedělili nulou.

\Rightarrow **rozvětvení**

Když $(p; q) \neq (0; 0)$, můžeme vydělit rovnici výrazem $p^2 + 4q^2$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(p^2 + 4q^2) = p^2 - 4q^2 \quad /: (p^2 + 4q^2)$$

$$x = \frac{p^2 - 4q^2}{p^2 + 4q^2} \quad K = \left\{ \frac{p^2 - 4q^2}{p^2 + 4q^2} \right\}$$

Když $(p; q) = (0; 0)$ nemůžeme vydělit

výrazem $(p^2 + 4q^2)$, ale můžeme dosadit \Rightarrow

$$x(p^2 + 4q^2) = p^2 - 4q^2$$

$$x(0^2 + 4 \cdot 0^2) = 0^2 - 4 \cdot 0^2$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pro } (p; q) = (0; 0) \text{ jsou}$$

řešením všechna reálná čísla $\Rightarrow K = R$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

Řešení pro x :

$$(p; q) \neq (0; 0)$$

$$K = \left\{ \frac{p^2 - 4q^2}{p^2 + 4q^2} \right\}$$

$$(p; q) = (0; 0)$$

$$K = R$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $p^2x - q^2x = p + q$ s neznámou x a parametry p a q .

$$p^2x - q^2x = p + q$$

$$x(p^2 - q^2) = p + q$$

$$x(p - q)(p + q) = p + q$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p - q)(p + q)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou. \Rightarrow Zjistíme, zda je výraz $(p - q)(p + q)$ někdy roven nule. Jde o součin dvou závorek, když je jedna nulová je nulový i součin $\Rightarrow (p - q) = 0 \Rightarrow p = q$ a

$(p + q) = 0 \Rightarrow p = -q$. Pokud chceme dělit, musíme vyloučit možnosti $p = \pm q$, abychom nedělili nulou.

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou proto píšeme pod sebe).

Když $p \neq \pm q$, můžeme vydělit rovnici výrazem $(p - q)(p + q)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(p - q)(p + q) = p + q \quad /: (p - q)(p + q)$$

$$x = \frac{p + q}{(p - q)(p + q)}$$

$$x = \frac{1}{p - q} \quad K = \left\{ \frac{1}{p - q} \right\}$$

Když $p = -q \Leftrightarrow q = -p$ nemůžeme vydělit výrazem $(p - q)(p + q)$, ale můžeme dosadit \Rightarrow

$$x(p - q)(p + q) = p + q$$

$$x(p + p)(p - p) = p - p$$

$$x(2p) \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pro } p = -q \text{ jsou řešením všechna reálná čísla } \Rightarrow K = R$$

Když $p = q$ nemůžeme vydělit výrazem $(p - q)(p + q)$, ale můžeme dosadit \Rightarrow

$$x(p - q)(p + q) = p + q$$

$$x(p - p)(p + p) = p + p$$

$$x \cdot 0 \cdot (2p) = 2p$$

$$x \cdot 0 = 2p$$

Levá strana je rovna nule pro každé x , u pravé strany jsou dvě možnosti:

$$p \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pravá strana je různá od nuly } \Rightarrow K = \emptyset.$$

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pravá strana se rovná nule } \Rightarrow K = R.$$

(jde o možnost diskutovanou u podmínky $p = -q \Leftrightarrow q = -p$, protože když se $p = 0$ a $p = q$, pak i $q = 0$ a potom platí i $p = -q$ ($0 = -0$))

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$p \neq \pm q$	$K = \left\{ \frac{1}{p - q} \right\}$
$p = -q \Leftrightarrow q = -p$	$K = R$
$p = q$ a zároveň $p \neq 0$	$K = \emptyset$

Př. 6: Petáková:
strana 21/cvičení 5 a) c)

Shrnutí: Pokud původní rovnice obsahuje zlomky, musíme zapsané podmínky zkontrolovat v každé z cest řešení rovnice.