2.8.4 Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Předpoklady: 2803

Pedagogická poznámka: Opět je potřeba přesvědčovat studenty, že nejde o nic nového. Řešíme soustavy zcela běžně, pouze při nebezpečných operacích musíme psát podmínky a rozvětvovat řešení.

Pedagogická poznámka: U všech následujících hodin, které se zabývají řešením příkladů s parametry postupujeme stejně – na začátku si rozebereme, jakým způsobem daný typ rovnic řešíme, napíšeme si na tabuli body tohoto postupu a pak studenti příklady samostatně řeší. Nejčastější chyby (podle frekvence výskytu):
nedodržení postupu (studenti většinou skončí dříve, jakmile získají řešení čehokoliv, co obsahuje znak =)
ztráta orientace (studenti zapomenou, že řeší rovnici pro *x*, a začnou řešit nerovnice nebo rovnice pro parametr)
opomenutí nebezpečné operace (v naprosté většině případů dělení), které vede k rozštěpení postupu
Přesto jsem přesvědčený, že v podstatě nemá cenu jakýkoliv z příkladů řešit na tabuli, protože ke správnému řešení studenti nepotřebují žádné neznámé informace a naprostá většina problémů je schována v nepozornosti, špatném zápisu nebo nedůslednosti. V žádné z těchto dovedností se nezlepší, když příklady opíšou z tabule.
Po napsání úvodního přehledu studenti samostatně řeší příklady, já se je snažím kontrolovat a pomáhat jim, krizová místa si promítneme a rozebereme na zdi. Protože zadání příkladů je krátké, napíšu všechny na tabuli, aby nikoho nezdržovalo, když si necháme něco promítnutého na zdi.

Řešení soustavy rovnic

- dosazování, sčítáním rovnic nebo pomocí jiné metody získáme rovnici o jediné neznámé
- rovnici vyřešíme
- dopočítáme hodnoty zbývající proměnné (zbývajících proměnných)

řešením není jediné číslo, ale uspořádaná dvojice (trojice…) čísel

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 3x+2y=6 \\ px+4y=2p \end{matrix}$ s neznámými *x* a *y* a parametrem *p*.

$3x+2y=6$

$px+4y=2p$

Řešíme jako normální soustavu $\Rightarrow$ vyjádříme z první rovnice *y* a dosadíme do druhé. Ze soustavy tak uděláme normální rovnici s parametrem.

$$3x+2y=6 \Rightarrow y=3-\frac{3x}{2}$$

$$px+4\left(3-\frac{3}{2}x\right)=2p$$

$$px+12-6x=2p$$

$px - 6x = 2p - 12$

$x(p-6) = 2(p-6)$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p-6)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(p-6)$ roven nule: $(p-6) = 0 \Rightarrow p = 6$. Pokud chceme dělit, musíme 6 vyloučit

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$p \neq 6$, můžeme vydělit rovnici výrazem $(p-6)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(p-6) = 2(p-6) \quad / : (p-6)$ $x = \frac{2(p-6)}{p-6} = 2$ Ještě musíme dopočíst y: $y = 3 - \frac{3x}{2} = 3 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 0 \qquad K = \{[2;0]\}$	$p = 6$ - nemůžeme dělit $\Rightarrow$ dosadíme $x(p-6) = 2(p-6)$ $x(6-6) = 2(6-6)$ $x \cdot 0 = 0$ rovnice je splněna pro každé reálné x $\Rightarrow$ $x \in R$ ještě dopočíst y: $y = 3 - \frac{3x}{2}$ $\Rightarrow \quad K = \left\{ \left[x; 3 - \frac{3x}{2} \right], x \in R \right\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro $[x;y]$:**
$p \neq 6$	$K = \{[2;0]\}$
$p = 6$	$K = \left\{ \left[x; 3 - \frac{3x}{2} \right], x \in R \right\}$

Pedagogická poznámka: Značné procento studentů spočte x v obou větvích a zapomene dopočítat y. Připomínám jim, že zapomněli provést poslední krok postupu, který jsme napsali na začátku hodiny. Tento typ chyby bude této i dalších hodinách nejčastější.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ (a+1)x - 2y &= 4 \end{aligned}$ s neznámými x a y a parametrem a.

$$2x + y = 3$$
$$(a+1)x - 2y = 4$$

Řešíme jako normální soustavu $\Rightarrow$ vyjádříme z první rovnice y a dosadíme do druhé. Ze soustavy uděláme normální rovnici s parametrem.

$2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x$

$(a+1)x - 2(3-2x) = 4$

$ax + x - 6 + 4x = 4$

$ax + 5x = 10$

$x(a+5) = 10$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(a+5)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(a+5)$ roven nule: $(a+5) = 0 \Rightarrow a = -5$. Pokud chceme dělit, musíme -5 vyloučit

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$a \neq -5$, můžeme vydělit rovnici výrazem	$a = -5$ - nemůžeme dělit, dosadíme

$(a+5)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(a+5)=10 \quad /:(a+5)$ $x=\frac{10}{a+5}$ Ještě musíme dopočíst *y*: $y=3-2x=3-2\left(\frac{10}{a+5}\right)=\frac{3a+15-20}{a+5}=\frac{3a-5}{a+5}$ $K=\left\{\left[\frac{10}{a+5};\frac{3a-5}{a+5}\right]\right\}$	$x(a+5)=10$ $x(-5+5)=10$ $x0=10$ rovnice není splněna pro žádné reálné *x* $\Rightarrow$ nenajdeme vyhovující *x*, nemá cenu hledat ani *y* $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	Řešení pro $[x;y]$:
$a\neq -5$	$K=\left\{\left[\frac{10}{a+5};\frac{3a-5}{a+5}\right]\right\}$
$a=-5$	$K=\emptyset$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\frac{x-2a}{y}=2$ $\frac{y+a}{x}=\frac{1}{a}$ s neznámými *x* a *y* a parametrem *a*.

$\frac{x-2a}{y}=2 \qquad \frac{y+a}{x}=\frac{1}{a}$

Výrazy v rovnicích obsahují zlomky $\Rightarrow$ musíme napsat podmínky.

$y\neq 0$, $x\neq 0$, $a\neq 0$.

Význam prvních dvou podmínek zatím neznáme, záleží na výsledcích.

Třetí podmínka $a\neq 0$ znamená, že pro $a=0$, rovnici nebudeme vůbec řešit a tedy $K=\emptyset$.

Rovnice vynásobíme a upravíme:

$\frac{x-2a}{y}=2 \quad /\cdot y \qquad \frac{y+a}{x}=\frac{1}{a} \quad /\, xa$

$x-2a=2y$

$a(y+a)=x$ - obou rovnic vyjádříme *x* a použijeme srovnávací metodu.

$x=2y+2a$

$x=ay+a^2$

$ay+a^2=2y+2a$

$ay-2y=2a-a^2$

$y(a-2)=a(2-a)$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(a-2)$ a nesmíme dělit nulou. $\Rightarrow$ Kdy je výraz $(a-2)$ roven nule: $(a-2)=0\Rightarrow a=2$. Pokud chceme dělit, musíme 2 vyloučit

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$a\neq 2$, můžeme vydělit rovnici výrazem $(a-2)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $y(a-2)=a(2-a) \quad /:(a-2)$	$a=2$ - nemůžeme dělit, dosadíme $y(2-2)=2(2-2)$ $y0=0$ rovnice je splněna pro každé reálné *y* Musíme dopočítat *x*:

$y=\frac{a(2-a)}{a-2}=-a$ Ještě musíme dopočíst *x*: $x=2y+2a=2(-a)+2a=0$ $K=\{[0;-a]\}$	$x=2y+2a=2y+2\cdot 2=2y+4 \quad \Rightarrow$ $K=\{[2y+4;y];y\in R\}$
Kontrola podmínek: Podmínka: $y\neq 0$: $y=0=-a\Rightarrow a=0$ - to už jsme vyloučili na začátku Podmínka: $x\neq 0$ - to vylučuje všechna získaná řešení, protože ve všech máme $x=0$ $\Rightarrow \; K=\emptyset$	**Kontrola podmínek:** Podmínka: $y\neq 0$ - jasné $y\in R-\{0\}$ Podmínka: $x\neq 0$ - dopočteme z jakého *y* toto *x* vyrobíme a zakážeme ho: $x=2y+4=0$ $2y+4=0$ $y=-2 \qquad \Rightarrow \qquad y\in R-\{-2;0\}$ $K=\{[2y+4;y];y\in R-\{-2;0\}\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro $[x;y]$:**
$a\in R-\{2\}$	$K=\emptyset$
$a=2$	$K=\{[2y+4;y];y\in R-\{-2;0\}\}$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se opakuje situace z minulé hodiny, kde po dopočítání musíme zkontrolovat platnost podmínek. Kontrolu podmínek je dobré stihnout s celou třídou. Pokud studenti řeší příklad sami, mají velké problémy s tím, že podmínky z úvodu příkladu vyloučí řešení pro všechna *a* různá od dvou.

Př. 4: Petáková:
strana 21/cvičení 8 a) b)
strana 21/cvičení 9
strana 21/cvičení 10

Shrnutí: Při řešení soustav rovnic s parametrem postupujeme stejně jako při řešení obyčejných rovnic s parametrem.