

## 2.8.5 Lineární nerovnice s parametrem

**Předpoklady:** 2208, 2802

**Pedagogická poznámka:** Pokud v tom necháte studenty vykoupat (což je, zdá se, jediné rozumné řešení) zabere tato látka tak jednu a půl vyučovací hodiny (první hodinu příklady 1.-4., polovinu druhé příklady 5. a 6.).  
Při samostatné práci studentů si určitě všimnete, že naprostá většina problémů pramení ze špatné orientace, neuplatňování základních pravidel a nepozornosti. Nic z toho jim výklad u tabule nemůže poskytnout.

V čem je řešení nerovnic podobné řešení rovnic?

- Nesmíme vydělit nerovnicí nulou.

V čem je řešení nerovnic jiné než řešení rovnic?

- Pokud dělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko.

⇒ **při dělení výrazem, který obsahuje parametr, musíme rozlišovat u hodnot výrazu nulu, kladnou hodnotu a zápornou hodnotu** ⇒ typicky budeme větvit do tří větví

**Pedagogická poznámka:** Úvodní přehled sestavíme společně se studenty s tím, že v něm je obsaženo vše potřebné k správnému vyřešení úloh této hodiny.

**Př. 1:** Vyřeš nerovnici  $2x + b > 0$  s neznámou  $x$  a parametrem  $b$ .

$$2x + b > 0 \quad / -b \quad \text{odečíst } b \text{ můžeme vždy}$$

$$2x > -b \quad / : 2$$

$$x > -\frac{b}{2} \quad K = \left(-\frac{b}{2}; \infty\right)$$

**Hodnoty parametru  $b$ :**

$$b \in \mathbb{R}$$

**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \left(-\frac{b}{2}; \infty\right)$$

**Pedagogická poznámka:** Skutečnost, že závěrečný přehled obsahuje pouze jediný řádek, činí předchozí příklad pro naprostou většinu studentů neřešitelným. Jediný řádek se jim zdá příliš málo (všechny ostatní příklady jich přece mají víc a ještě jsme očekávali, že se větvení zesložití) a tak závěrečný přehled většinou nenapíše.

**Př. 2:** Vyřeš nerovnici  $ax - 2 > 0$  s neznámou  $x$  a parametrem  $a$ .

$$ax - 2 > 0$$

$$ax > 2$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem  $a$ , ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli zda obrátit nebo zachovat nerovnost)

⇒ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$ , můžeme vydělit nerovnicí, dělíme kladným číslem ⇒ zachováváme nerovnost:

$$ax > 2 \quad / : a$$

$$x > \frac{2}{a} \quad K = \left( \frac{2}{a}, \infty \right)$$

$a = 0$  nemůžeme dělit, dosadíme  $\Rightarrow$

$$ax > 2$$

$$0x > 2$$

$0 > 2 \Rightarrow$  nevyjde nikdy  $\Rightarrow K = \emptyset$

$a < 0$ , můžeme vydělit nerovnicí, dělíme záporným číslem  $\Rightarrow$  obracíme nerovnost:

$$ax > 2 \quad /: a$$

$$x < \frac{2}{a} \quad K = \left( -\infty, \frac{2}{a} \right)$$

**Závěrečný přehled:**

Hodnoty parametru $p$ :	Řešení pro $x$ :
$a > 0$	$K = \left( \frac{2}{a}, \infty \right)$
$a = 0$	$K = \emptyset$
$a < 0$	$K = \left( -\infty, \frac{2}{a} \right)$

**Pedagogická poznámka:** Nezanedbatelná část studentů před dělením rozdělí výpočet pouze na dvě větve ( $a = 0, a \neq 0$ ). Ptám se jich, jaký vlastně mělo význam si na začátku hodiny psát, co nás čeká a jak budeme postupovat.

**Př. 3:** Vyřeš graficky nerovnici  $ax - 2 > 0$  s neznámou  $x$  a parametrem  $a$ .

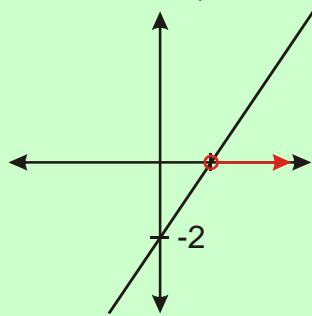
Levá strana – funkce  $y = ax - 2$  – přímka (lineární funkce), procházející bodem  $[0; -2]$

(hodnota pro  $x = 0$  je  $-2$ ). Směr přímky závisí na hodnotě parametru  $a$ .

Pravá strana –  $0$  – budeme se zajímat, která část grafu levé strany je nad nebo pod osou  $x$

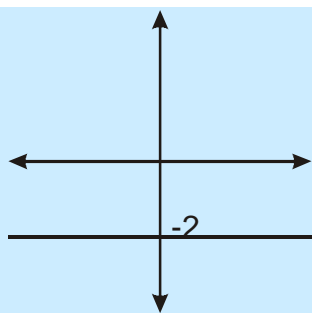
$\Rightarrow$  **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$ , funkce  $y = ax - 2$  je rostoucí:



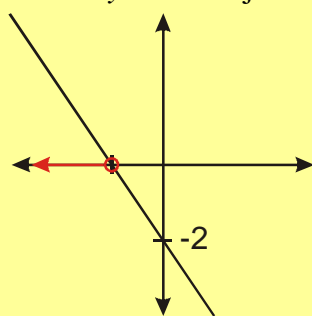
$$\Rightarrow K = \left( \frac{2}{a}, \infty \right)$$

$a = 0$  funkce  $y = ax - 2$  je konstantní:



$$\Rightarrow K = \emptyset$$

funkce  $y = ax - 2$  je klesající::



$$\Rightarrow K = \left(-\infty, \frac{2}{a}\right)$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru $p$ :	Řešení pro $x$ :
$a > 0$	$K = \left(\frac{2}{a}, \infty\right)$
$a = 0$	$K = \emptyset$
$a < 0$	$K = \left(-\infty, \frac{2}{a}\right)$

**Pedagogická poznámka:** Nakreslit graf první funkce je vzhledem k neurčitosti zadání pro hodně studentů příliš velké sousto. Po menším čekání tak řešíme bod a) společně a samostatně studenti dopočítávají až zbytek.

**Př. 4:** Vyřeš nerovnici  $ax + b \leq 0$  s neznámou  $x$  a parametry  $a, b$ . Každou větev řešení zkontroluj pomocí grafického řešení.

$$ax + b \leq 0$$

$$ax \leq -b$$

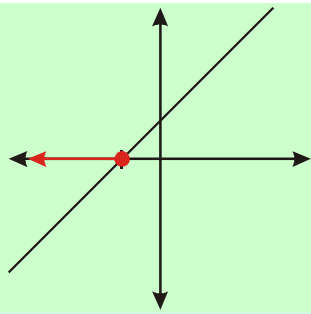
Chceme vydělit rovnicí výrazem  $a$ , ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli zda obrátit nebo zachovat nerovnost)

$\Rightarrow$  **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$ , můžeme vydělit nerovnicí, dělíme kladným číslem  $\Rightarrow$  nerovnost zachováváme:

$$ax \leq -b \quad / : a$$

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad K = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$$



$a = 0$  nemůžeme dělit, dosadíme  $\Rightarrow$

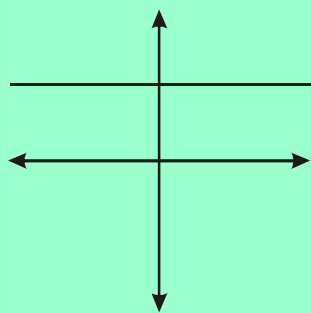
$$ax \leq -b$$

$$0x \leq -b$$

$0 \leq -b \Rightarrow$  záleží na hodnotě  $b \Rightarrow$  **opět rozvětvujeme podle hodnoty  $b$**

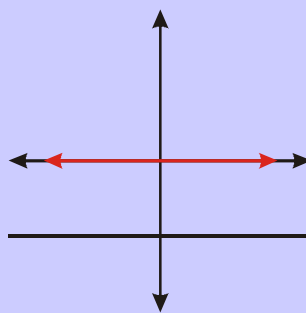
$b > 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow$  získáváme nerovnici

$0 \leq$  záporné číslo  $\Rightarrow K = \emptyset$



$b \leq 0 \Rightarrow -b \geq 0 \Rightarrow$  získávám nerovnici

$0 \leq$  nezáporné číslo  $\Rightarrow K = R$

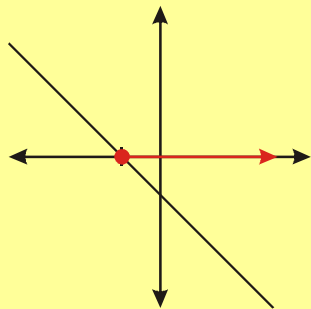


$a < 0$ , můžeme vydělit nerovnici, dělíme záporným číslem  $\Rightarrow$  nerovnost obracíme:

$$ax \leq -b \quad / : a$$

$$x \geq -\frac{b}{a}$$

$$K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right\rangle$$



**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametrů  $a, b$ :**

**Řešení pro  $x$ :**

$$a > 0, b \in R$$

$$K = \left( -\infty; -\frac{b}{a} \right)$$

$$a = 0, b \in (0; \infty)$$

$$K = \emptyset$$

$$a = 0, b \in (-\infty; 0)$$

$$K = R$$

$$a < 0, b \in R$$

$$K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right\rangle$$

**Pedagogická poznámka:** Téměř všichni selžou u prostřední větve s  $a = 0$ . Nejčastěji bez nějakého důvodu napíší automaticky  $K = \emptyset$ , pak po nich chci, aby přestali hádat a začali počítat. Další se pak spletou až na samém konci, kdy si neuvědomí, že podmínka patří k  $b$  a my hledáme řešení pro  $x$  a tak omezení volby  $b$  neznamená omezení volby  $x$ .

**Př. 5:** Vyřeš nerovnici  $px - 2 \geq 2x - p$  s neznámou  $x$  a parametrem  $p$ .

$$px - 2 \geq 2x - p$$

$$px - 2x \geq 2 - p$$

$$x(p - 2) \geq 2 - p$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem  $(p - 2)$ , ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abych věděli zda obrátit nebo zachovat nerovnost).  $\Rightarrow$  Zjistíme, kdy je výraz  $(p - 2)$  roven nule:  $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$

$\Rightarrow$  **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$p > 2$ , můžeme vydělit nerovnicí, dělíme kladným číslem  $\Rightarrow$  nerovnost zachováváme:

$$x(p - 2) \geq 2 - p \quad /:(p - 2)$$

$$x \geq \frac{2 - p}{p - 2}$$

$$x \geq -1 \quad K = \langle -1, \infty \rangle$$

$p = 2$  nemůžeme dělit, dosadíme  $\Rightarrow$

$$x(p - 2) \geq 2 - p$$

$$x(2 - 2) \geq 2 - 2$$

$$0x \geq 0$$

$$0 \geq 0 \Rightarrow \text{vyjde vždy} \Rightarrow K = R$$

$p < 2$ , můžeme vydělit nerovnicí, dělíme záporným číslem  $\Rightarrow$  nerovnost obracíme:

$$x(p - 2) \geq 2 - p \quad /:(p - 2)$$

$$x \leq \frac{2 - p}{p - 2}$$

$$x \leq -1 \quad K = \langle -\infty, -1 \rangle$$

**Závěrečný přehled:**

Hodnoty parametru $p$ :	Řešení pro $x$ :
$p > 2$	$K = \langle -1, \infty \rangle$
$p = 2$	$K = R$
$p < 2$	$K = \langle -\infty, -1 \rangle$

**Pedagogická poznámka:** Příklad nečiní studentům větší problémy, pouze Ti slabší zase automaticky dělí intervaly podle nuly ne dvojky na  $p > 0$ ,  $p = 2$  a  $p < 0$ .

**Př. 6:** Vyřeš nerovnici  $\frac{1}{x-p} \leq 1$  s neznámou  $x$  a parametrem  $p$ .

$\frac{1}{x-p} \leq 1$  - nerovnice obsahuje zlomek  $\Rightarrow$  je třeba podmínka  $x-p \neq 0 \Rightarrow x \neq p$  - teď můžeme násobit výrazem  $(x-p)$ , může být kladný i záporný  $\Rightarrow$  rozdělíme na dvě větve stejně bychom dělili na dvě větve nerovnici  $\frac{1}{x-\sqrt{2}} \leq 1 \Rightarrow$  tohle je dělení výpočtu podle

hodnot  $x$ , ne podle hodnot parametru (jiný typ dělení než jsme u parametrických nerovnic dosud používali)  $\Rightarrow$  **tohle dělení se neprojeví v závěrečném přehledu, výsledky z obou větví budeme muset sjednotit**

$x-p < 0 \Rightarrow x < p$  - násobíme záporným číslem  $\Rightarrow$  obracíme nerovnost  
 $\frac{1}{x-p} \leq 1 \quad / \cdot (x-p)$   
 $1 \geq x-p$   
 $1+p \geq x \Rightarrow$  vypadá to na interval  $(-\infty; p+1)$ , ale počítáme jen s čísly  $x < p$   
 $\Rightarrow$   
 $K_1 = (-\infty; p)$

$x-p > 0 \Rightarrow x > p$  - násobíme kladným číslem  $\Rightarrow$  zachováváme nerovnost  
 $\frac{1}{x-p} \leq 1 \quad / \cdot (x-p)$   
 $1 \leq x-p$   
 $1+p \leq x \Rightarrow$  vypadá to na interval  $\langle p+1; \infty \rangle$ , počítáme jen s čísly  $x > p$  a taková jsou v intervalu  $\langle p+1; \infty \rangle$  všechna  $\Rightarrow$   
 $K_2 = \langle 1+p, \infty \rangle$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot  $p$ , ale rozdělili jsme všechna možná  $x$  na dvě části a pro každou část jsem to spočítali  $\Rightarrow$  celkový výsledek je sjednocení obou řešení.

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty \rangle$$

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $p$ :**

$$p \in \mathbb{R}$$

**Řešení pro  $x$ :**

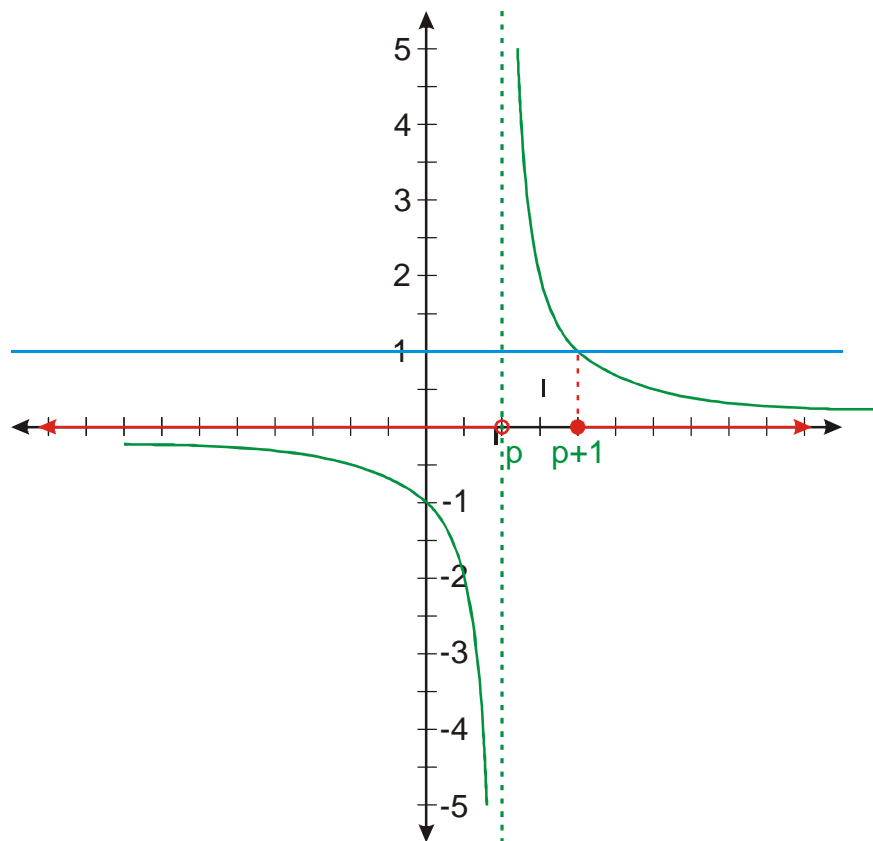
$$K = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty \rangle$$

**Pedagogická poznámka:** Diskuse o vzniku konečného výsledku sjednocením je důležitá, přesto se objeví studenti, kteří nebudou mít v situaci zcela jasno. Na druhou stranu jde o příklad poměrně extrémní na představitost a je velmi málo pravděpodobné, že by se s ním ještě někdy setkali.

**Př. 7:** Vyřeš graficky nerovnici  $\frac{1}{x-p} \leq 1$  s neznámou  $x$  a parametrem  $p$ .

Levá strana – funkce  $y = \frac{1}{x-p}$  - lineární lomená funkce, posunutá po ose  $x$  o  $p$ .

Pravá strana – funkce  $y = 1$ .



$$K = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty \rangle$$

**Pedagogická poznámka:** Teprve z grafického řešení někteří studenti pochopí, jak se příklad vlastně měl řešit.

**Shrnutí:** Při řešení nerovnic s parametrem musíme při dělení s výrazem obsahujícím parametr dávat pozor i na znaménko tohoto výrazu.