## 2.8.8 Kvadratické nerovnice s parametrem

**Předpoklady:** 2806

**Pedagogická poznámka:** Z hlediska orientace v tom, co studenti počítají, patří tato hodina určitě mezi nejtěžší během celého středoškolského studia. Proto je vhodné úvodní přehled s postupem nakreslit na tabuli a trvat na tom, že studenti nemohou dokončit řešení příkladu, dokud neprojdou celý postup.

Postup při řešení kvadratických nerovnic

- pravíme nerovnici do základního tvaru
- najdeme kořeny odpovídající kvadratické rovnice
- nakreslíme kořeny na osu *x*
- nakreslíme obrázek s grafem funkce
- podle obrázku najdeme řešení nerovnice

Na co všechno budeme muset dávat pozor?

- úpravy nerovnice $\Rightarrow$ dělení (jako u lineárních nerovnic)
- hledání kořenů odpovídající kvadratické rovnice $\Rightarrow$ odmocnina a jmenovatel ve vzorci $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- kreslení grafu pro určení řešení $\Rightarrow$ znaménko před $x^2$, kvůli tvaru grafu („ďolík“ nebo „kopeček“)

**Př. 1:** Vyřeš nerovnici $x^2-4x-t>0$ s neznámou *x* a parametrem *t*.

Nejdříve najdeme kořeny kvadratické rovnice $x^2-4x-t=0$, abychom mohli nakreslit obrázek. Do vzorce můžeme dosadit bez dalších podmínek:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-t)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16+4t}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4(4+t)}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{4+t}}{2}$$

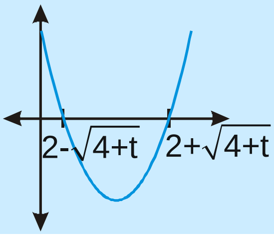
$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+t}$$

Ve vzorci je odmocnina $\sqrt{4+t}$, výraz $(4+t)$ může mít různá znaménka, podle toho se bude měnit řešení. $\Rightarrow$ Rozdělíme řešení podle hodnot výrazu $(4+t)$.

$(4+t)>0 \Leftrightarrow t>-4$ děláme odmocniny z kladného čísla, vyjde kladné číslo, získáme dva kořeny: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+t}$

$x_1=2+\sqrt{4+t}$ $\qquad$ $x_2=2-\sqrt{4+t}$

Nakreslíme obrázek $\Rightarrow$ „ďolík“ se dvěma průsečíky s osou *x*.

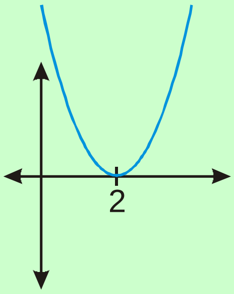


Hledáme části nad osou $\Rightarrow$ $K = \left(-\infty, 2-\sqrt{4+t}\right) \cup \left(2+\sqrt{4+t}, \infty\right)$

$(4+t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$ pod odmocninou nula $\Rightarrow$ jediný kořen

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+t} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$

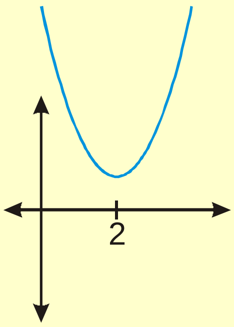
Nakreslíme obrázek – „ďolík“ s jediným průsečíkem s osou *x*.




Hledáme části nad osou *x* $\Rightarrow$ $K = R - \{2\}$

$(4+t) < 0 \Leftrightarrow t < -4$ pod odmocninou záporné číslo $\Rightarrow$ žádné řešení $\Rightarrow$ žádné průsečíky s osou *x*

Nakreslíme obrázek – „ďolík“ bez průsečíku s osou *x*.




Hledáme části nad osou *x* $\Rightarrow$ $K = R$

**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *t*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $t \in (-4; \infty)$ | $K = \left(-\infty, 2-\sqrt{4+t}\right) \cup \left(2+\sqrt{4+t}, \infty\right)$ |
| $t = -4$ | $K = R - \{2\}$ |
| $t \in (-\infty; -4)$ | $K = R$ |

**Pedagogická poznámka:** Jak už bylo napsáno v úvodu nejčastější (o to masovější) chybou je ukončení příkladu ve chvíli, kdy studenti dořeší kvadratickou rovnici (bohužel tím opakují chybu, kterou dělali ve chvíli, kdy se učili obyčejné kvadratické nerovnice).

**Př. 2:** Vyřeš nerovnici $y^2 - ty - 1 \le 0$ s neznámou *y* a parametrem *t*.

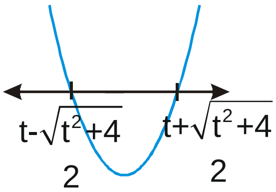
Nejdříve najdu kořeny kvadratické rovnice $y^2 - ty - 1 = 0$, abychom mohli nakreslit obrázek. Do vzorce můžeme dosadit bez dalších podmínek:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{t \pm \sqrt{(-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

Ve vzorci je odmocnina $\sqrt{t^2+4}$, výraz $\left(t^2+4\right)$ je vždy kladný $\Rightarrow$ rovnice má vždy dvě řešení $\Rightarrow$ nemusíme dělit řešení příkladu podle hodnot parametru *t*.

$\left(t^2+4\right)>0 \Leftrightarrow t\in R$ děláme odmocniny z kladného čísla, vyjde kladné číslo $\Rightarrow$ získáme dva kořeny: $y_1=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$ $\qquad$ $y_2=\dfrac{t-\sqrt{t^2+4}}{2}$

Nakreslíme obrázek – „ďolík“ se dvěma průsečíky s osou *x*.




Hledáme části pod nebo na ose $\Rightarrow$ $K=\left\langle \dfrac{t-\sqrt{t^2+4}}{2};\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right\rangle$

**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *t*:** | **Řešení pro *y*:** |
|---|---|
| $t\in R$ | $K=\left\langle \dfrac{t-\sqrt{t^2+4}}{2};\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right\rangle$ |

**Pedagogická poznámka:** Příklad je těžký právě tím, jak je lehký. S faktem, že se řešení vůbec nedělí, se někteří studenti nesmiřují příliš lehce. V této souvislosti nezbývá než neustále opakovat, že dělení příkladu není nutné ze zásady, ale vždy jde o důsledek něčeho jiného, co jsme provedli při dodržování postupu převzatého z řešení normálních rovnic nebo nerovnic.

**Pedagogická poznámka:** Třetí příklad při hodině nestíháme a studenti ho dodělávají doma.

**Př. 3:** Vyřeš nerovnici $px^2-2x+2>0$ s neznámou *x* a parametrem *p*.

Stejně jako v předchozích příkladech nejdříve dosazením do vzorce najdeme kořeny kvadratické rovnice $px^2-2x+2=0$, abychom mohli nakreslit obrázek.

Dosazení do vzorce je možné pouze v případě, že platí $p\neq 0$ $\Rightarrow$ dělíme výpočet

$p=0$ $\Rightarrow$ nejde dosadit do vzorce $\Rightarrow$ vyzkoušíme dosazením do nerovnice

$0x^2-2x+2=-2x+2>0$

$2>2x$

$x<1 \Rightarrow K=\left(-\infty;1\right)$

$p\neq 0$ $\Rightarrow$ můžeme dosadit do vzorce

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot p\cdot 2}}{2p}=\frac{2\pm\sqrt{4-8p}}{2p}=\frac{2\pm2\sqrt{1-2p}}{2p}=\frac{1\pm\sqrt{1-2p}}{p}$$

počet kořenů rovnice závisí na znaménku výrazu pod odmocninou $\Rightarrow$ řešíme nerovnici

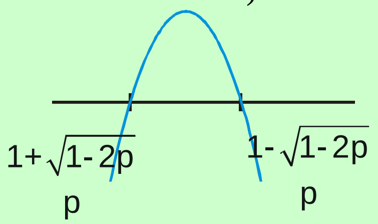
$1-2p>0$

$1>2p$

$p < \frac{1}{2}$

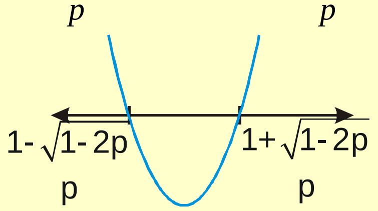
**POZOR:** při kreslení grafů nezáleží pouze na počtu průsečíků s osou *x*, ale také na tvaru grafu (zda jde o „ďolík“ nebo „kopeček“) $\Rightarrow$ kromě znaménka pod odmocninou musíme sledovat také znaménko před $x^2$ $\Rightarrow$ záleží také na znaménku samotného parametru *p* (láme se podle nuly) $\Rightarrow$ získáme tak tři intervaly s hraničními body 0 a $\frac{1}{2}$.

$p \in (-\infty; 0)$ $\Rightarrow$ grafem je „kopeček“ (záporné *a* před $x^2$) a rovnice má dva kořeny (menší $\frac{1+\sqrt{1-2p}}{p}$ a větší $\frac{1-\sqrt{1-2p}}{p}$ - jmenovatel obou zlomků je záporný, proto je větší ten s menším čitatelem)




$\Rightarrow$ hledáme body nad osou *x* $\Rightarrow$ $K = \left( \frac{1+\sqrt{1-2p}}{p}; \frac{1-\sqrt{1-2p}}{p} \right)$

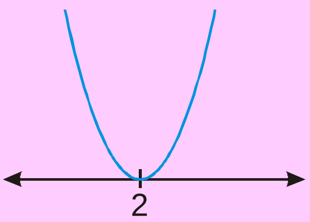
$p \in \left( 0; \frac{1}{2} \right)$ $\Rightarrow$ grafem je „ďolík“ (kladné *a* před $x^2$) a rovnice má dva kořeny (menší $\frac{1-\sqrt{1-2p}}{p}$ a větší $\frac{1+\sqrt{1-2p}}{p}$)




$\Rightarrow$ hledáme body nad osou *x* $\Rightarrow$ $K = \left( -\infty; \frac{1-\sqrt{1-2p}}{p} \right) \cup \left( \frac{1+\sqrt{1-2p}}{p}; \infty \right)$

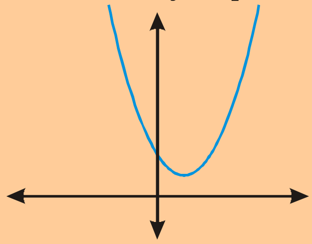
$p = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ grafem je „ďolík“ (kladné *a* před $x^2$) a rovnice má jediný kořen:

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2p}}{p} = \frac{1 \pm 0}{\frac{1}{2}} = 2$ $\Rightarrow$ graf se dotýká osy *x* v bodě 2




$\Rightarrow$ hledáme body nad osou *x* $\Rightarrow$ $K = R - \{2\}$

$p \in \left(\frac{1}{2};\infty\right) \Rightarrow$ grafem je „ďolík“ (kladné $a$ před $x^2$) a rovnice nemá žádný kořen (pod odmocninou je záporné číslo) $\Rightarrow$ graf je celý nad osou $x$



$\Rightarrow$ hledáme body nad osou $x$ $\Rightarrow$ $K = R$

**Závěrečný přehled:**

| **Hodnoty parametru *p*:** | **Řešení pro *x*:** |
|---|---|
| $p \in (-\infty;0)$ | $K = \left(\frac{1+\sqrt{1-2p}}{p};\frac{1-\sqrt{1-2p}}{p}\right)$ |
| $p = 0$ | $K = (-\infty;1)$ |
| $p \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ | $K = \left(-\infty;\frac{1-\sqrt{1-2p}}{p}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-2p}}{p};\infty\right)$ |
| $p = \frac{1}{2}$ | $K = R - \{2\}$ |
| $p \in \left(\frac{1}{2};\infty\right)$ | $K = R$ |

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je opravu náročný na orientaci a dopředu studentům zdůrazňuji, že není žádná tragédie, pokud se jim ho nepodaří správně vyřešit. Při společné kontrole se pak snažím zdůrazňovat, že na řešení není třeba ničeho jiného než dodržování postupu a přehledného zápisu.

**Shrnutí:** Při řešení kvadratických nerovnic s parametrem musíme dávat pozor i na hodnoty výrazu před $x^2$, který rozhoduje o typu grafu funkce.