2.8.9 Parametrické rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Předpoklady: 2410, 2411, 2806

Pedagogická poznámka: Opět si napíšeme na začátku hodiny na tabuli (nejlépe tak, aby se zápis mohl otočit nebo jinak schovat a v případě potřeby ho bylo možné opět ukázat) jednotlivé kroky postupu při řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou a při řešení příkladů v případě, že se studenti ztratí na tento postup odkazuji.

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje pouze tři příklady, všechny řešené minimálně dvěma způsoby. Řešení pomocí významu absolutní hodnoty je důležité a schválně řazené až jako druhé, protože mnohým žákům vyjasní část předchozího klasického řešení.

Postup řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou metodou dělení definičního oboru:

- zbavíme se absolutní hodnoty podle znaménka výrazu uvnitř a tím rozdělíme výpočet na dvě případně více cest,
- spočteme rovnice (nerovnice) v každé z cest,
- zkontrolujeme, zda výsledek patří mezi čísla, se kterými jsme v dané cestě počítali,
- výsledky, které prošly kontrolou v předchozím kroku, dáme dohromady.

Metoda řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou pomocí významu absolutní hodnoty:

- $|x-3|=2$: hledáme čísla na ose vzdálená od čísla 3 o 2,
- $|x+1|=|x-(-1)|=5$: hledáme čísla na ose vzdálená od čísla -1 o 5.

Př. 1: Vyřeš rovnici $|x-3|=c-1$ s neznámou x a parametrem c.

$|x-3|=c-1$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot x. Záleží na znaménku výrazu $(x-3)$.

$(x-3)\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$ uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$ $\lvert x-3\rvert=x-3$ $x-3=c-1$ $x=c+2$ Počítáme jen s $x\geq 3$ $\Rightarrow$, pokud je číslo $x=c+2$ řešením musí platit $x=c+2\geq 3$ $c+2\geq 3$	$(x-3)\leq 0 \Rightarrow x\leq 3$ uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$ $\lvert x-3\rvert=-x+3$ $3-x=c-1$ $x=4-c$ Počítáme jen s $x\leq 3$ $\Rightarrow$, pokud je číslo $x=4-c$ řešením musí platit $x=4-c\leq 3$ $4-c\leq 3$
$c\geq 1$ Kořen $x=c+2$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali $K_1=\{c+2\}$	$1\leq c$ Kořen $x=4-c$ je mezi čísly, se kterými jsme počítali $K_2=\{4-c\}$
$c<1$ Kořen $x=c+2$ není mezi čísly, se kterými jsme počítali. $K=\emptyset$	$c<1$ Kořen $x=4-c$ není mezi čísly, se kterými jsme počítali. $K=\emptyset$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot *c*, ale rozdělili jsme všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsem to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení $K = K_1 \cup K_2 = \{c+2; 4-c\}$

Ještě zkontrolujeme hraniční hodnotu *c*. Pro $c = 1$ platí:
$c + 2 = 1 + 2 = 3$
$4 - c = 4 - 1 = 3$
Oba kořeny se rovnají.

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$c \in (1; \infty)$	$K = \{c+2; 4-c\}$
$c = 1$	$K = \{3\}$
$c \in (-\infty; 1)$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Studenti poměrně rychle a snadno spočítají kořeny, ale je těžké je donutit k tomu, aby zkontrolovali, zda patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. Většinou po chvíli spočítám jednu z cest a až druhou nechám na nich.

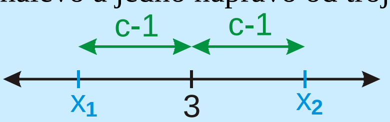
Př. 2: Vyřeš rovnici $|x-3| = c - 1$ s neznámou *x* a parametrem *c* použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x-3| = c - 1$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla 3 na ose vzdáleny o $c - 1$.
$\Rightarrow$ výraz $c - 1$ znamená vzdálenost $\Rightarrow$ dělíme podle hodnot parametru *c*:

$c - 1 < 0 \Rightarrow c < 1$ - vzdálenost je záporná – nesmysl $\Rightarrow$ $K = \emptyset$

$c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$ - vzdálenost je nulová $\Rightarrow$ jediné číslo jehož obraz má nulovou vzdálenost od obrazu čísla 3 je opět číslo 3 $\Rightarrow$ $K = \{3\}$.

$c - 1 > 0 \Rightarrow c > 1$ - vzdálenost je větší než nula $\Rightarrow$ budou existovat dvě taková čísla jedno nalevo a jedno napravo od trojky. Velikosti najdeme z obrázku:



$x_1 = 3 - (c-1) = 3 - c + 1 = 4 - c$

$x_2 = 3 + (c-1) = 2 + c$

$K = \{c+2; 4-c\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$c \in (1; \infty)$	$K = \{c+2; 4-c\}$
$c = 1$	$K = \{3\}$
$c \in (-\infty; 1)$	$K = \emptyset$

Stejný výsledek jako v předchozím příkladě (jinak by to ani nešlo).

Pedagogická poznámka: Hodně studentů má problémy s výpočtem řešení pomocí vzdálenosti $c-1$. Snažím se, aby si to v případě problémů vyzkoušeli na konkrétních číslech a pak postup napodobili.

Pedagogická poznámka: Z řešení příkladu 2 je jasné, proč v příkladu 12 vyšly z obou větší stejné podmínky pro hodnoty parametru.

Př. 3: Vyřeš rovnici $|x-p|=2$ s neznámou *x* a parametrem *p* metodou dělení definičního oboru.

$|x-p|=2$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot *x*. Záleží na znaménku výrazu $(x-p)$.

$x-p<0 \Rightarrow x<p \Rightarrow x\in(-\infty;p)$
uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$
$|x-p|=-x+p$
$|x-p|=2$
$-x+p=2$
$x=p-2$
Musíme zkontrolovat zda $x=p-2$ je mezi čísly, se kterými počítáme ($x<p$)
$x=p-2<p$
$-2<0$, platí vždy (pro každé *p*) $\Rightarrow$ řešení $p-2$ je vždy mezi čísly, se kterými počítáme $\Rightarrow$ $K_1=\{p-2\}$

$x-p\geq 0 \Rightarrow x\geq p$
uvnitř absolutní hodnoty nezáporné číslo $\Rightarrow$
$|x-p|=x-p$
$|x-p|=2$
$x-p=2$
$x=p+2$
Musíme zkontrolovat zda $x=p+2$ je mezi čísly, se kterými počítáme ($x\geq p$) -
$x=p+2>p$
$2>0$, platí vždy (pro každé *p*) $\Rightarrow$ řešení $p+2$ je vždy mezi čísly, se kterými počítáme $\Rightarrow$ $K_2=\{p+2\}$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot *p*, ale rozdělili jsem všechna možná *x* na dvě části a pro každou část jsme to spočítali $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení.
$K=K_1\cup K_2=\{p-2;p+2\}$

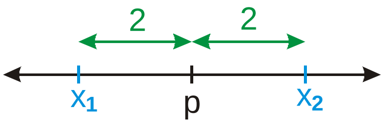
Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p\in R$	$K=\{p-2;p+2\}$

Pedagogická poznámka: Stejně jako v minulé hodině mají někteří problém s tím, že se řešení nevětví podle parametru.
Stejně jako v příkladu 1 je velkým problémem kontrola získaného kořene.
Nerovnosti $-2<0$ a $2>0$ jsou často interpretovány jako znak toho, že řešením rovnice je množina reálných čísel. Je třeba vracet se k tomu, co tento okamžik žáci počítají (kontrolují zda číslo $p-2$ patří mezi čísla, se kterými jsme počítali) a na základě uvědomění si toho rozhodovat, co nerovnost znamená (za číslo *p* můžeme dosadit cokoliv a číslo $p-2$ bude patřit mezi čísla, se kterými jsme v intervalu počítali).

Př. 4: Vyřeš rovnici $|x-p|=2$ s neznámou x a parametrem p použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x-p|=2$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla p vzdáleny o 2.



$x_1 = p-2$

$x_2 = p+2$

$K=\{p-2; p+2\}$

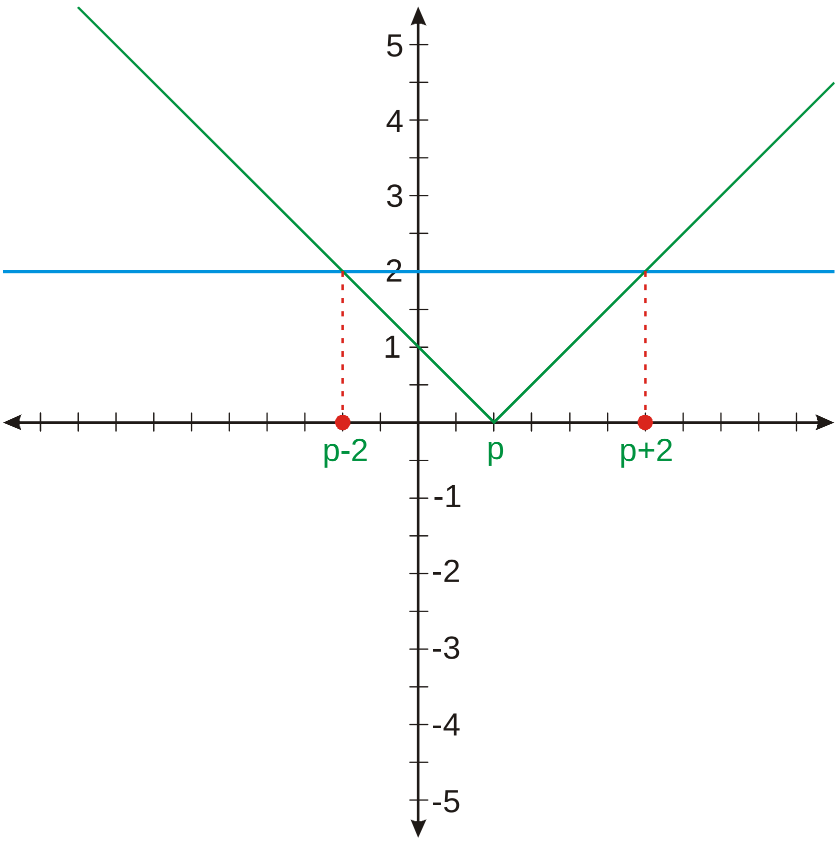
Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in R$	$K=\{p-2; p+2\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $|x-p|=2$ s neznámou x a parametrem p graficky.

Levá strana – funkce $y=|x-p|$ $\Rightarrow$ funkce absolutní hodnota, posunutá po ose x o p.

Pravá strana – funkce $y=2$.



$K=\{p-2; p+2\}$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in R$	$K=\{p-2; p+2\}$

Př. 6: Vyřeš nerovnici $|x+c| \le 3$ s neznámou x a parametrem c.

$|x+c| \le 3$ - rovnice obsahuje absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot x. Záleží na znaménku výrazu $(x+c)$.

$(x+c) \le 0 \Rightarrow x \le -c$

uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$

$|x+c| = -x-c$

$-x-c \le 3$

$-c-3 \le x$

Zdá se, že $x \in \langle -3-c; \infty)$

Počítáme jen s $x \le -c$

číslo $-3-c$ je menší než $-c$ $\Rightarrow$ z intervalu něco zbylo $K_1 = \langle -3-c; -c \rangle$

$(x+c) \ge 0 \Rightarrow x \ge -c$

uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$

$|x+c| = x+c$

$x+c \le 3$

$x \le -c+3$

Zdá se, že $x \in (-\infty; -c+3\rangle$

Počítáme jen s $x \ge -c$

číslo $-c+3$ je větší než číslo $-c$ $\Rightarrow$

z intervalu něco zbylo $K_2 = \langle -c; -c+3 \rangle$

Nedělil jsem výpočet podle různých hodnot c, ale rozdělil jsem všechna možná x na dvě části a pro každou část jsem to spočítal $\Rightarrow$ celkový výsledek je sjednocení obou řešení

$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3-c; -c \rangle \cup \langle -c; -c+3 \rangle = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

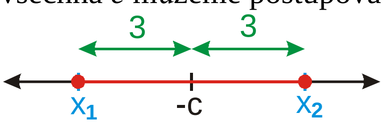
Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$c \in R$	$K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

Př. 7: Vyřeš rovnici $|x+c| \le 3$ s neznámou x a parametrem c použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x+c| = |x-(-c)| \le 3$ - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu $-c$ vzdáleny o 3 nebo méně.

parametr c představuje číslo, od kterého měříme vzdálenost, na jeho hodnotě nezáleží $\Rightarrow$ pro všechna c můžeme postupovat stejně



$x_1 = -c-3$

$x_2 = -c+3$

$K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *c*:	**Řešení pro *x*:**
$c \in R$	$K = \langle -3-c; -c+3 \rangle$

Př. 8: Petáková:
strana 21/cvičení 7 b) c) d)

Shrnutí: