2.9.1 Exponenciální funkce

**Předpoklady: 2714**

Funkce, které už známe:

- \( y = x , \ y = x^2 , \ y = x^5 , \ldots \)
- \( y = x^{-1} = \frac{1}{x} , \ y = x^{-2} = \frac{1}{x^2} , \ y = x^{-4} = \frac{1}{x^4} , \ldots \)
- \( y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} , \ y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} , \ldots \) (\( \sqrt{9} = 3 \), protože \( 3^2 = 9 \). Odmocnina je inverzní k mocnině a proto ověřujeme hodnoty odmocnin pomocí mocnění)
- \( y = x^{\frac{7}{2}} = \sqrt[2]{x^7} , \ y = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} , \ldots \)
- Dokázali bychom spočítat s libovolnou přesností i \( y = x^{\sqrt{2}} \) (\( \sqrt{2} \approx 1,414 \ldots \Rightarrow \) počítali bychom \( y = x^{\frac{14}{10}} , \ y = x^{\frac{141}{100}} , \ y = x^{\frac{1414}{1000}} , \ldots \)).

Když to shrneme:

- U všech uvedených funkcí měníme číslo \( x \), které umocňujeme (základ mocniny, mocněnec), číslo, na které umocňujeme (exponent, moci nitel), zůstává stejně.
- Umíme umocnit na libovolné reálné číslo.

⇒ Zkusíme to obrátit. Pořád stejně číslo (třeba dvojku) budeme umocňovat na různá čísla \( x \)
⇒ získáme funkci \( y = 2^x \).

Protože dokážeme umocnit na libovolné reálné číslo bude \( D(2^x) = \mathbb{R} \).

**Př. 1:** Doplň tabulku s hodnotami funkce \( y = 2^x \).

<table>
<thead>
<tr>
<th>( x )</th>
<th>-3</th>
<th>-2</th>
<th>-1</th>
<th>0</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>( y )</td>
<td>( \frac{1}{8} )</td>
<td>( \frac{1}{4} )</td>
<td>( \frac{1}{2} )</td>
<td>1</td>
<td>2</td>
<td>4</td>
<td>8</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Pedagogická poznámka:** Bohužel se skoro s jistotou objeví několik jedinců, kteří zapomněli na umocňování a budou počítat \( 2^{-1} = -2 , \ 2^{-2} = -4 , \ldots \). Je potřeba je rychle odhalit a zlikvidovat.
Př. 2: Pomocí tabulky nakresli graf funkce \( y = 2^x \). Svůj obrázek ověř pomocí libovolného matematického programu.
Př. 3: Doplň do tabulky hodnoty funkce \( y = 2^x \) pro \( x \) uvedená v tabulce. Pro každou hodnotu \( x \) nejprve odhadni hodnotu \( y \) a poté ji urči pomocí kalkulátoru s přesností na tři desetinná čísla. Získané hodnoty využij k zakreslení do grafu funkce.

<table>
<thead>
<tr>
<th>( x )</th>
<th>( \frac{1}{2} )</th>
<th>( \pi )</th>
<th>( -\sqrt{3} )</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>( y )</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>( x )</th>
<th>( \frac{1}{2} )</th>
<th>( \pi )</th>
<th>( -\sqrt{3} )</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Odhad ( y )</td>
<td>0 &lt; ( \frac{1}{2} ) &lt; 1</td>
<td>( 3 &lt; \pi &lt; 4 )</td>
<td>( -2 &lt; -\sqrt{3} &lt; -1 )</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>( 2^0 &lt; 2^\frac{1}{2} &lt; 2^1 )</td>
<td>( 2^3 &lt; 2^\pi &lt; 2^4 )</td>
<td>( 2^{-2} &lt; 2^{-\frac{1}{2}} &lt; 2^{-1} )</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>( 1 &lt; 2^\frac{1}{2} &lt; 2 )</td>
<td>( 8 &lt; 2^\pi &lt; 16 )</td>
<td>( \frac{1}{4} &lt; 2^{-\frac{1}{2}} &lt; \frac{1}{2} )</td>
</tr>
<tr>
<td>$y$</td>
<td>$rac{1}{2} = \sqrt{2} \approx 1,414$</td>
<td>$2^x \approx 8,825$</td>
<td>$2^{-\sqrt{3}} \approx 0,301$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Získané body jsou v grafu znázorněny oranžově.

**Př. 4:** Pomocí grafu a tabulky urči vlastnosti funkce $y = 2^x$

$D(f) = R$ (dvojku dokážeme umocnit na cokoliv)

$H(f) = (0; \infty)$ (výsledky umocňování dvojky musí být vždy kladné, protože umocňujeme kladné číslo)

Funkce je rostoucí v $R$.

Funkce je zdola omezená, není shora omezená, nemá maximum ani minimum.

Funkce není ani lichá ani sudá.

Funkce prochází bodem [0;1] (proč je to důležité, uvidíme příští hodinu).

Exponenciální funkce je nejen rostoucí, ale dokonce nejrychleji rostoucí funkcí. Zkusíme si porovnat funkce $y = x^{100}$ (ta roste hodně rychle) a $y = 2^x$ (obyčejná exponenciální funkce).

Nejdříve si nakreslíme grafy $y = x^{100}$ a $y = 2^x$:
Z grafů nevypadá, že by funkce $y = 2^x$ měla moc šancí $y = x^{100}$ předběhnout.

Zkusíme počítat hodnoty:

$x = 10$

<table>
<thead>
<tr>
<th>$y = x^{100}$</th>
<th>$10^{100}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$y = 2^x$</td>
<td>$2^{10}$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Zdá se to jasné, $y = 2^x$ nemá šanci.

$x = 100$

<table>
<thead>
<tr>
<th>$y = x^{100}$</th>
<th>$100^{100}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$y = 2^x$</td>
<td>$2^{100}$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

$x = 500$

<table>
<thead>
<tr>
<th>$y = x^{100}$</th>
<th>$500^{100}$</th>
</tr>
</thead>
</table>

| $y = 2^x$    | $2^{500}$   |

$7888609052210118054117285652827862296732064351090230$

$0477027893066406250000000000000000000000000000000000000$
$y = 2^x$

<table>
<thead>
<tr>
<th>$x$</th>
<th>$y = 2^x$</th>
<th>$y = x^{100}$</th>
<th>$y = 2^{1000}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
<td>$0123456789$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Že by se funkce $y = 2^x$ přece jenom chytla?

$x = 1000$

$y = x^{100}$

$1000^{100}$

$2^{1000}$

Hodnota funkce $y = 2^x$ je už více než 10x větší!!

$x = 2000$

$y = x^{2000}$

$2000^{2000}$

$2^{2000}$

Z funkce $y = x^{100}$ se stává outsider.

$x = 10000$

$y = x^{1000}$

$1000^{1000}$

$2^{10000}$
Nezbývá než konstatovat, že funkce \( y = x^{100} \) je v porovnání s funkcí \( y = 2^x \), co se týká rychlosti růstu, totální loser.

**Pedagogická poznámka:** Souboj funkcí počítáme na živo pomocí programu MuPAD.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad pojímám jako polopisemku. Jsou k dispozici dvě sady zadání (každé pro jedno oddělení). Student, kteří za 15 minut nestihnou udělat první dva příklady, mají mínus, studenti, kteří stihnou všechno, mají plus.

**Př. 5:** Nakresli grafy funkcí: a) \( y = 2^{x+1} \)  
  b) \( y = 2^{x-1} \)  
  c) \( y = 2^{x-2} - 1 \)  
  d) \( y = 2^{x+2} + 1 \)  
  e) \( y = 2^{|x|} \)  
  f) \( y = 2^{x-2} \)  
  g) \( y = 2 \cdot 2^{x-1} \)  
  h) \( y = \frac{2^{x+1}}{2} \)

Pokud uvažujeme \( y = 2^x = f(x) \), platí:

\[
y = 2^{x+1} = f(x+1)
\]

Zvolíme \( x \).

Vypočteme \( x+1 \).

Nakreslíme funkci: \( y = f(x+1) = 2^{x+1} \).

Pokud uvažujeme \( y = 2^x = f(x) \), platí:

\[
y = 2^{x-1} = f(x-1)
\]

Zvolíme \( x \).

Vypočteme \( x-1 \).

Nakreslíme funkci: \( y = f(x-1) = 2^{x-1} \).

Pokud uvažujeme \( y = 2^x = f(x) \), platí:

\[
y = 2^{x-2} = f(x-2) - 1
\]

Zvolíme \( x \).

Vypočteme \( x-2 \).

Nakreslíme funkci: \( y = f(x-2) = 2^{x-2} \).

Nakreslíme funkci: \( y = f(x-2) - 1 = 2^{x-2} - 1 \).

Pokud uvažujeme \( y = 2^x = f(x) \), platí:

\[
y = 2^{x+2} = f(x+2) + 1
\]

Zvolíme \( x \).

Vypočteme \( x+2 \).

Nakreslíme funkci: \( y = f(x+2) = 2^{x+2} \).

Nakreslíme funkci: \( y = f(x+2) + 1 = 2^{x+2} + 1 \).
Pokud uvažujeme \( y = 2^x = f(x), \) platí:

\[ y = 2^{x-1} = 2f(x-1). \]

Zvolíme \( x. \)

Vypočteme \( x-1. \)

Vypočteme \( 1-|x|. \)

Nakreslíme funkci \( y = f(1-|x|) = 2^{x-1}. \)

Nakreslíme funkci \( y = f(x) = 2^x. \)

Nakreslíme funkci \( y = f(x) - 2 = 2^x - 2. \)

Pokud uvažujeme \( y = 2^x = f(x), \) platí:

\[ y = 2^2 = 2f(x-1). \]

Zvolíme \( x. \)

Vypočteme \( x-1. \)

Nakreslíme funkci \( y = f(x-1) = 2^{x-1}. \)

Nakreslíme funkci \( y = 2f(x-1) = 2 \cdot 2^{x-1}. \)

Nakreslíme funkci \( y = \frac{2^{x+1}}{2} = \frac{1}{2} f(x+1). \)

Zvolíme \( x. \)

Vypočteme \( x+1. \)

Nakreslíme funkci \( y = f(x+1) = 2^{x+1}. \)

Nakreslíme funkci \( y = \frac{1}{2} f(x+1) = \frac{2^{x+1}}{2}. \)
Př. 6:  Petáková:
strana 30/cvičení 66  \( f_3, f_4, f_6 \)
strana 30/cvičení 67  \( g_1, g_2 \)

**Shrnutí:** Funkce s neznámou v exponentu se nazývá exponenciální a je nejrychleji rostoucí funkcí.