

## 2.9.1 Exponenciální funkce

### Předpoklady: 2714

Funkce, které už známe:

- $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^5$ , ...
- $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ,  $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ , ...
- $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ , ... ( $\sqrt{9} = 3$ , protože  $3^2 = 9$ . Odmocnina je inverzní k mocnině a proto ověřujeme hodnoty odmocnin pomocí mocnění)
- $y = x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}$ ,  $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ , ...
- Dokázali bychom spočítat s libovolnou přesností i  $y = x^{\sqrt{2}}$  ( $\sqrt{2} \doteq 1,414\dots \Rightarrow$  počítali bychom  $y = x^{\frac{14}{10}}$ ,  $y = x^{\frac{141}{100}}$ ,  $y = x^{\frac{1414}{1000}}$ , atd...).

Když to shrneme:

- U všech uvedených funkcí měníme číslo  $x$ , které umocňujeme (základ mocniny, mocněnec), číslo, na které umocňujeme (exponent, mocnitel), zůstává stejné.
- Umíme umocnit na libovolné reálné číslo.

$\Rightarrow$  Zkusíme to obrátit. Pořád stejné číslo (třeba dvojku) budeme umocňovat na různá čísla ( $x$ )

$\Rightarrow$  získáme funkci  $y = 2^x$ .

Protože dokážeme umocnit na libovolné reálné číslo bude  $D(2^x) = \mathbb{R}$ .

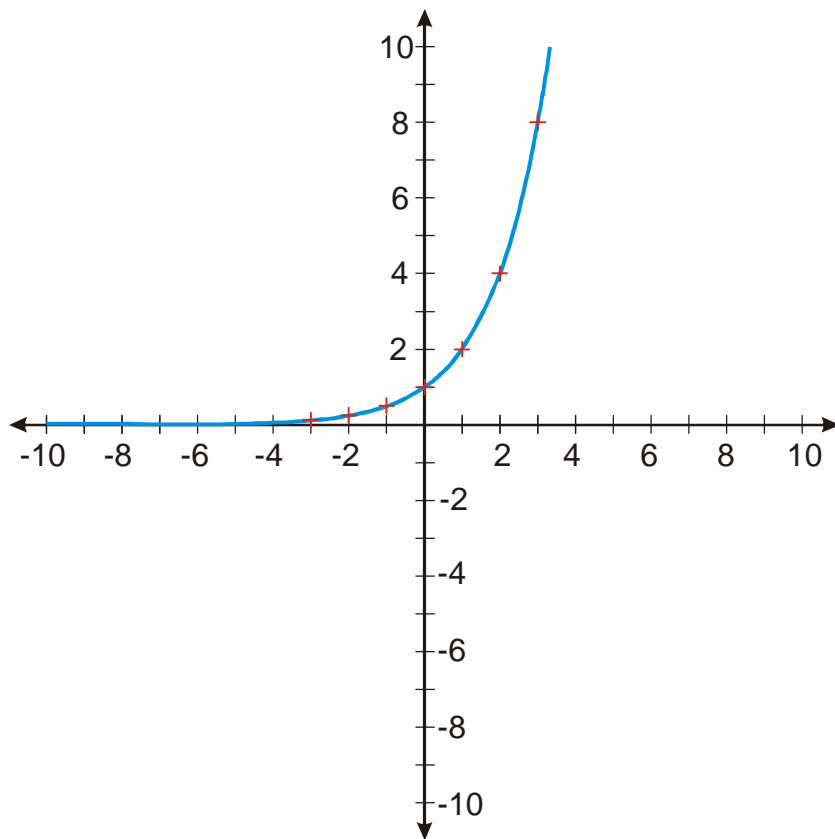
**Př. 1:** Dopln tabulku s hodnotami funkce  $y = 2^x$ .

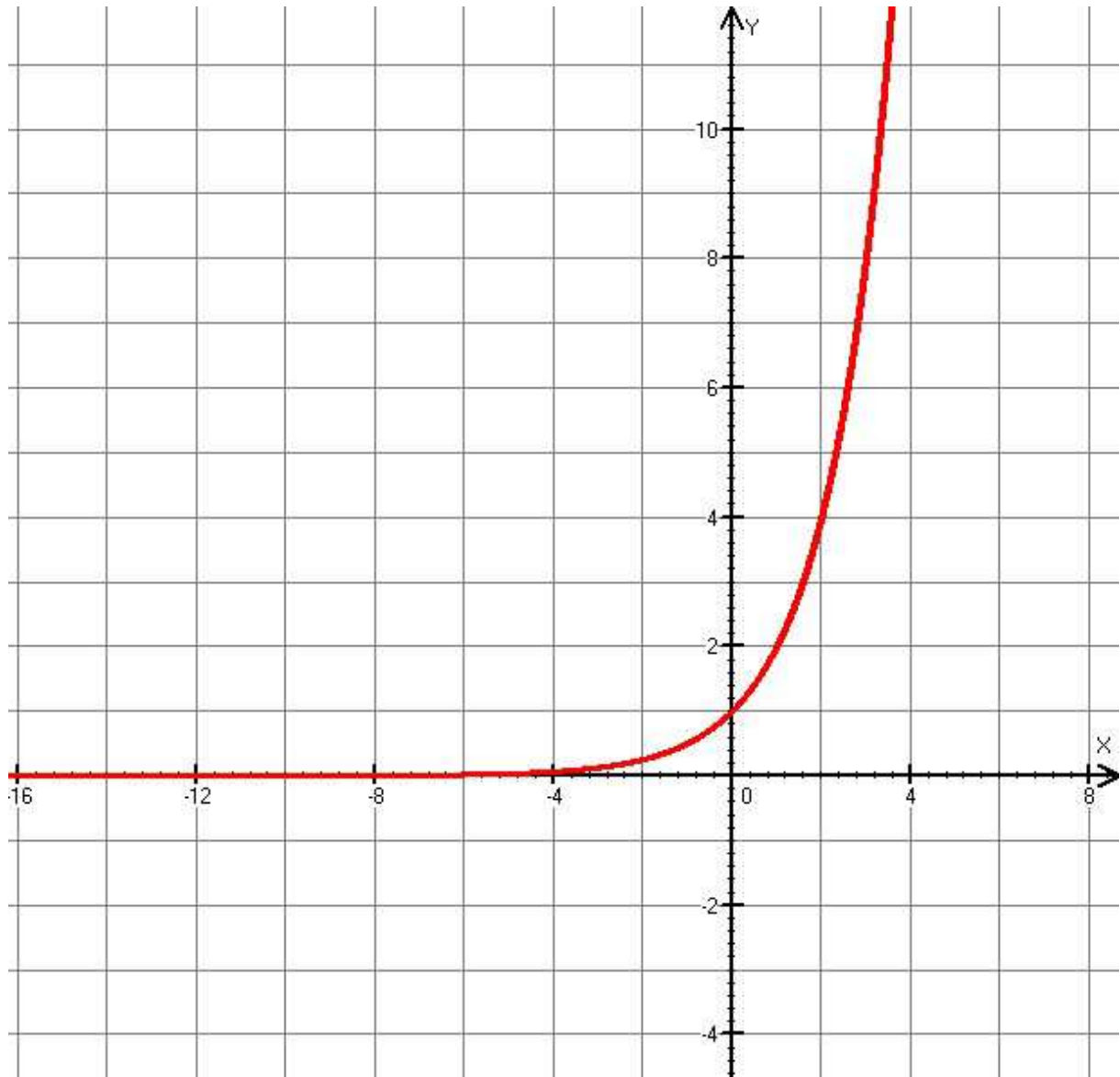
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$							

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

**Pedagogická poznámka:** Bohužel se skoro s jistotou objeví několik jedinců, kteří zapomněli na umocňování a budou počítat  $2^{-1} = -2$ ,  $2^{-2} = -4$ , ... Je potřeba je rychle odhalit a zlikvidovat.

**Př. 2:** Pomocí tabulky nakresli graf funkce  $y = 2^x$ . Svůj obrázek ověř pomocí libovolného matematického programu.





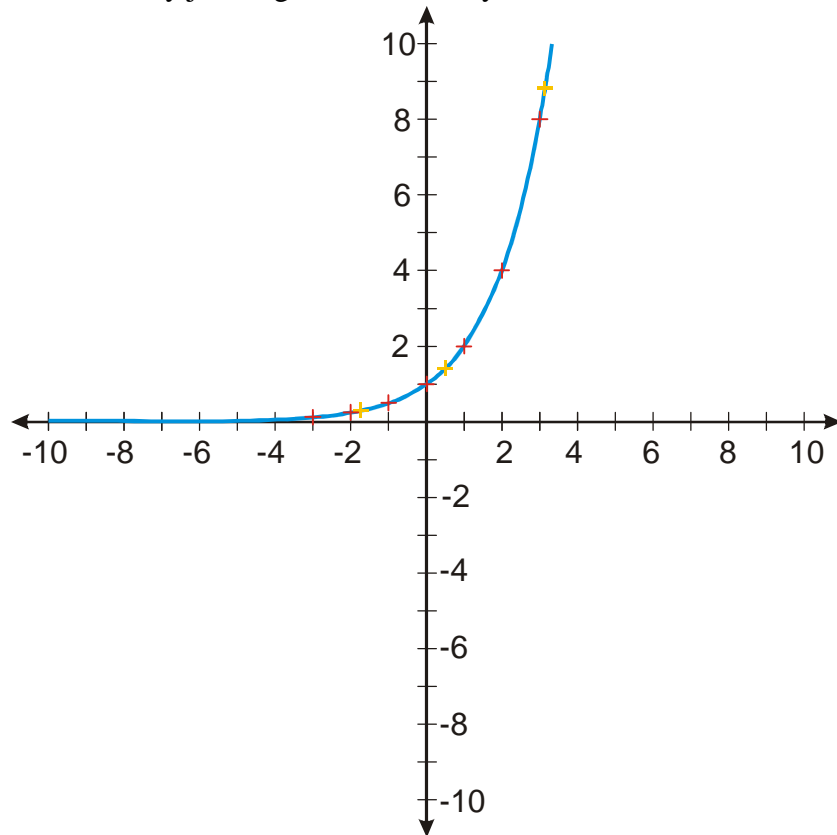
**Př. 3:** Doplně do tabulky hodnoty funkce  $y = 2^x$  pro  $x$  uvedená v tabulce. Pro každou hodnotu  $x$  nejprve odhadni hodnotu  $y$  a poté ji urči pomocí kalkulačtoru s přesností na tři desetinná čísla. Získané hodnoty využij k zakreslení do grafu funkce.

$x$	$\frac{1}{2}$	$\pi$	$-\sqrt{3}$
$y$			

$x$	$\frac{1}{2}$	$\pi$	$-\sqrt{3}$
<b>Odhad <math>y</math></b>	$0 < \frac{1}{2} < 1$ $2^0 < 2^{\frac{1}{2}} < 2^1$ $1 < 2^{\frac{1}{2}} < 2$	$3 < \pi < 4$ $2^3 < 2^\pi < 2^4$ $8 < 2^\pi < 16$	$-2 < -\sqrt{3} < -1$ $2^{-2} < 2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1}$ $\frac{1}{4} < 2^{-\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$

$y$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \doteq 1,414$	$2^{\pi} \doteq 8,825$	$2^{-\sqrt{3}} \doteq 0,301$
-----	---	------------------------	------------------------------

Získané body jsou v grafu znázorněny oranžově.



**Př. 4:** Pomocí grafu a tabulky urči vlastnosti funkce  $y = 2^x$

$D(f) = \mathbb{R}$  (dvojku dokážeme umocnit na cokoliv)

$H(f) = (0; \infty)$  (výsledky umocňování dvojky musí být vždy kladné, protože umocňujeme kladné číslo)

Funkce je rostoucí v  $\mathbb{R}$ .

Funkce je zdola omezená, není shora omezená, nemá maximum ani minimum.

Funkce není ani lichá ani sudá.

Funkce prochází bodem  $[0;1]$  (proč je to důležité, uvidíme příští hodinu).

Exponenciální funkce je nejen rostoucí, ale dokonce nejrychleji rostoucí funkcí. Zkusíme si porovnat funkce  $y = x^{100}$  (ta roste hodně rychle) a  $y = 2^x$  (obyčejná exponenciální funkce).

Nejdříve si nakreslíme grafy  $y = x^{100}$  a  $y = 2^x$  :





$y = 2^x$	$2^{10000}$	1995063116880758384883742162683585083823496831886192 4548520089498529438830221946631919961684036194597899 3311294232091242715564913494137811175937859320963239 5785573004679379452676524655126605989552055008691819 3311542508608460618104685509074866089624888090489894 8380092539416332578506215683094739025569123880652250 9664387444104675987162698545322286853816169431577562 9640762836880760732228535091641476183956381458969463 8994108409605362678210646214273333940365255656495306 0314268023496940033593431665145929777327966577560617 2582031407994198179607378245683762280037302885487251 9008344645814546505579296014148339216157345881392570 9537976911927780082695773567444412306201875783632550 2728323789270710373802866393031428133241401624195671 6905740614196543423246388012488561473052074319922596 1179625013099286024170834080760593232016126849228849 6255841312844061536738951487114256315111089745514203 3138202029316409575964647560104058458415660720449628 6701651506192063100418642227590867090057460641785695 1911456055068251250406007519842261898059237118054444 7880729063952425483392219827074044731623767608466130 3377870603980341319713349365462270056316993745550824 1780972810983291314403571877524768509857276937926433 2215993998768866608083688378380276432827751722736575 7274478411229438973381086160742325329197481312019760 4178281965697475898164531258434135959862784130128185 4062834766490886905210475808826158239619857701224070 4433058307586903931960460340497315658320867210591330 0903752823415539745394397715257455290510212310947321 6107534748257407752739863482984983407569379556466386 2187456949927901657210370136443313581721431179139822 2983845847334440270964182851005072927748364550578634 5011008529878123894739286995408343461588070439591189 8581514577917714361969872813145948378320208147498217 1858011389071228250905826817436220577475921417653715 6877256149045829049924610286300815355833081301019876 7585623434353895540917562340084488752616264356864883 3519463720377293240094456246923254350400678027273837 7553764067268986362410374914109667185570507590981002 4678988017827192595338128242195402830275940844895501 4676668389697996886241636313376393903373455801407636 7418777110553842257394991101864682196965816514851304 9422236994771476306915546821768287620036277725772378 1365331611196811280792669481887201298643660768551639 8605346022978715575179473852463694469230878942659482 1700805112032236549628816903573912136833839359175641 8733850510970271613915439590991598154654417336311656 9360311222499379699992267817323580231118626445752991 3575817500819983923628461524988108896023224436217377 1618086357015468484058622329792853875623486556440536 9626220189635710288123615675125433383032700290976686 5056855715750551672751889919412971133769014991618131 5171544007728650573189557450920330185304847113818315 4073240533190384620840364217637039115506397890007428 5367219628090347797453332046836879586858023795221862 9120080742819551317948157624448298518461509704888027
-----------	-------------	--

Nezbývá než konstatovat, že funkce  $y = x^{100}$  je v porovnání s funkcí  $y = 2^x$ , co se týká rychlosti růstu, totální loser.

**Pedagogická poznámka:** Souboj funkcí počítáme na živo pomocí programu MuPAD.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad pojmám jako polopísemku. Jsou k dispozici dvě sady zadání (každé pro jedno oddělení). Student, kteří za 15 minut nestihnou udělat první dva příklady, mají mínus, studenti, kteří stihnou všechno, mají plus.

- Př. 5:** Nakresli grafy funkcí: a)  $y = 2^{x+1}$       b)  $y = 2^{x-1}$       c)  $y = 2^{x-2} - 1$   
d)  $y = 2^{x+2} + 1$       e)  $y = 2^{1-|x|}$       f)  $y = |2^x - 2|$   
g)  $y = 2 \cdot 2^{x-1}$       h)  $y = \frac{2^{x+1}}{2}$

$$y = 2^{x+1}$$

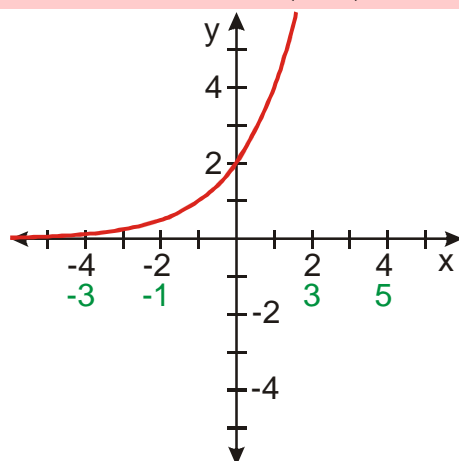
Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

$$y = 2^{x+1} = f(x+1).$$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x+1$ .

Nakreslíme funkci:  $y = f(x+1) = 2^{x+1}$ .



$$y = 2^{x-1}$$

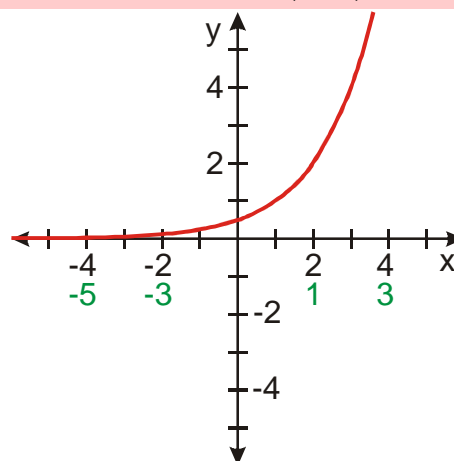
Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

$$y = y = 2^{x-1} = f(x-1).$$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x-1$ .

Nakreslíme funkci:  $y = f(x-1) = 2^{x-1}$ .



$$y = 2^{x-2} - 1$$

Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

$$y = 2^{x-2} - 1 = f(x-2) - 1.$$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x-2$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x-2) = 2^{x-2}$ .

Nakreslíme funkci:

$$y = f(x-2) - 1 = 2^{x-2} - 1.$$

$$y = 2^{x+2} + 1$$

Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

$$y = y = 2^{x+2} + 1 = f(x+2) + 1.$$

Zvolíme  $x$ .

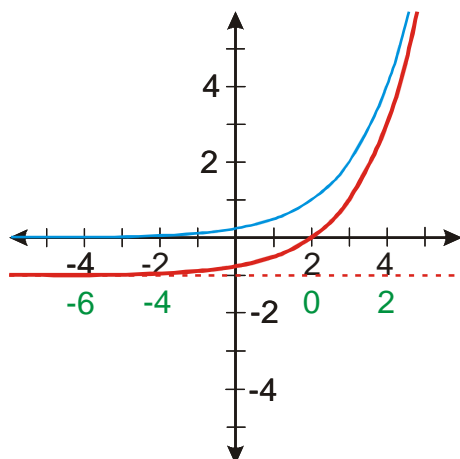
Vypočteme  $x+2$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+2) = 2^{x+2}$ .

Nakreslíme funkci:

$$y = f(x+2) + 1 = 2^{x+2} + 1.$$





$$y = 2^{1-|x|}$$

Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

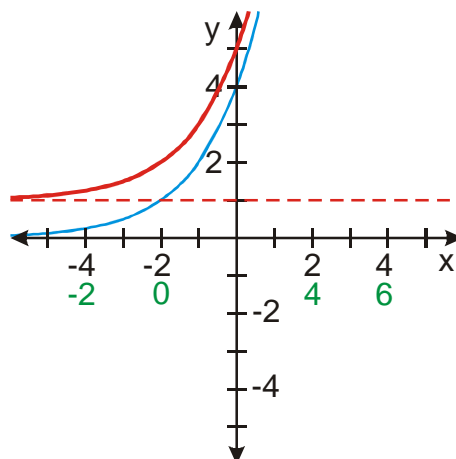
$$y = 2^{1-|x|} = f(1-|x|).$$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $|x|$ .

Vypočteme  $1-|x|$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(1-|x|) = 2^{1-|x|}$ .



$$y = |2^x - 2|$$

Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

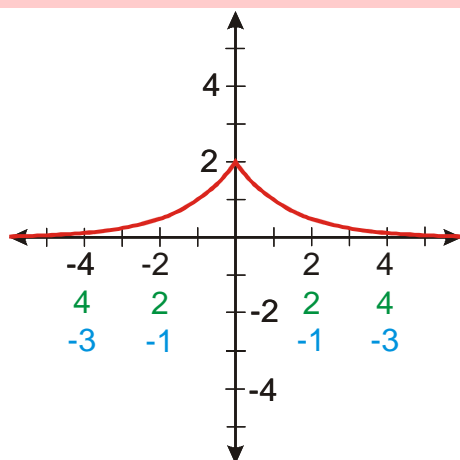
$$y = |2^x - 2| = |f(x) - 2|.$$

Zvolíme  $x$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x) = 2^x$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x) - 2 = 2^x - 2$ .

Nakreslíme funkci  $y = |f(x) - 2| = |2^x - 2|$ .



$$y = 2 \cdot 2^{x-1}$$

Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

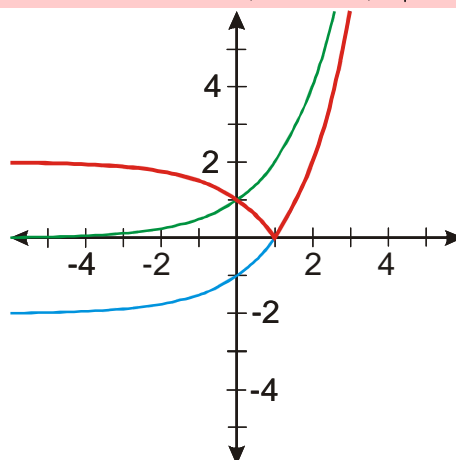
$$y = 2 \cdot 2^{x-1} = 2f(x-1).$$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x-1$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x-1) = 2^{x-1}$ .

Nakreslíme funkci  $y = 2f(x-1) = 2 \cdot 2^{x-1}$ .



$$y = \frac{2^{x+1}}{2}$$

Pokud uvažujeme  $y = 2^x = f(x)$ , platí:

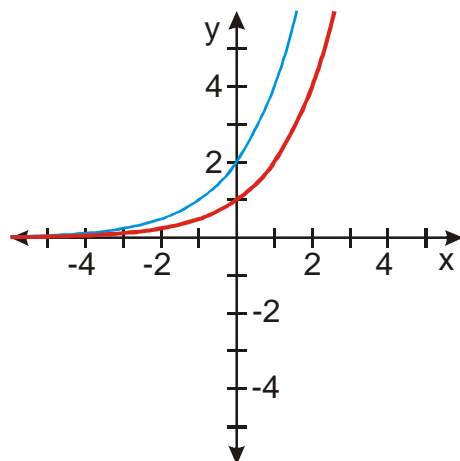
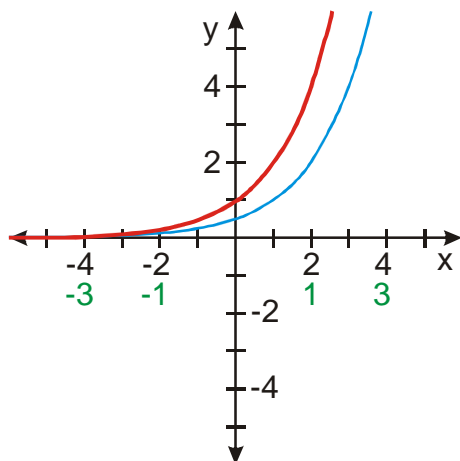
$$y = \frac{2^{x+1}}{2} = \frac{1}{2} f(x+1).$$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x+1$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+1) = 2^{x+1}$ .

Nakreslíme funkci  $y = \frac{1}{2} f(x+1) = \frac{2^{x+1}}{2}$ .



**Př. 6:** Petáková:  
 strana 30/cvičení 66  $f_3, f_4, f_6$   
 strana 30/cvičení 67  $g_1, g_2$

**Shrnutí:** Funkce s neznámou v exponentu se nazývá exponenciální a je nejrychleji rostoucí funkcí.