2.9.3 Exponenciální závislosti

Předpoklady: 2902

Pedagogická poznámka: Látka připravená v této hodině zabere tak jeden a půl vyučovací hodiny.

Proč probíráme tak exotickou funkci jako je exponenciální?
V životě existuje spousta závislostí, které popisuje právě exponenciální funkce.

Př. 1: Tvůj předek uložil v bance u příležitosti založení Univerzity Karlovy v roce 1348 2 Kč na tří procentní úrok. Urči kolik peněz by sis mohl vybrat na financování Tvého vysokoškolského studia v roce 2009. Předpokládej (což je samozřejmě nesmyslné), že během spoření se podmínky neměnily a nedošlo ke znehodnocování měny.

Jak se měnilo množství uložených peněz:
1348 … 2 Kč
1349 … 2 Kč (vložené peníze) + $2 \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem $2 + 2 \cdot 0,03 = 2(1 + 0,03)$
Necháme výraz v tomto tvaru, abychom mohli najít funkční závislost. Výraz $2(1+0,03)$ vyjadřuje částku na konci roku 1349, která bude v bance po celý rok 1350 a která bude úročena.
1350 … $2(1+0,03)$ Kč (uložené peníze) + $2(1+0,03) \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem
$2(1+0,03) + 2(1+0,03) \cdot 0,03 = 2(1+0,03)(1+0,03) = 2(1+0,03)^2$
1351 … $2(1+0,03)^2$ Kč (uložené peníze) + $2(1+0,03)^2 \cdot 0,03$ Kč (úrok), celkem
$2(1+0,03)^2 + 2(1+0,03)^2 \cdot 0,03 = 2(1+0,03)^2(1+0,03) = 2(1+0,03)^3$
1352 … $2(1+0,03)^4$
1353 … $2(1+0,03)^5$
1358 (po 10 letech) … $2(1+0,03)^{10}$
1448 (po 100 letech) … $2(1+0,03)^{100}$
Po x letech … $2(1+0,03)^x$
Teď můžeme dosadit a dopočítat úlohu:
2009 … $2(1+0,03)^{2009-1348} = 611555006,4$.
Za podmínek uvedených v zadání bychom mohli vybrat 611 555 006 Kč a 40 ha (za to už se dá studovat poměrně bez problémů).

Pedagogická poznámka: Studenti příklad samozřejmě nepočítají sami od začátku. Částku ušetřenou po prvním roce počítám na tabuli, pak postupně počítají čím dál více oni. Výsledky kontrolujeme po jednotlivých rocích.

Poznámka: Na první pohled to vypadá, že je velmi jednoduché uspořit velkou částku. Ohromující výsledek 612 našetřených miliónů je ale důsledkem toho, že exponenciální funkce roste čím dál rychleji a že jsme v příkladě spořili nereálně dlouhou dobu. Když budeme sledovat naspořenou částku po staletích, uvidíme, že k naspoření 1 miliónu je potřeba 500 let.

rok	**délka spoření**	**dosazení**	**naspořená částka**
1448	100	$2(1+0,03)^{1448-1348}$	38, 40
1548	200	$2(1+0,03)^{1548-1348}$	738, 70
1648	300	$2(1+0,03)^{1648-1348}$	14197, 00
1748	400	$2(1+0,03)^{1748-1348}$	272847, 40
1848	500	$2(1+0,03)^{1848-1348}$	5243754, 50
1948	600	$2(1+0,03)^{1948-1348}$	100777787, 30
2048	700	$2(1+0,03)^{2048-1348}$	1936811206, 00

Př. 2: Využij řešení předchozího příkladu k nalezení vzorce, který udává našetřenou částku v závislosti na: počátečním vkladu n_0, úroku p a době spoření t. Pomocí vzorce pak urči naspořené částky pro následující (reálné případy):
a) 10000 Kč uložených s úrokem 1,5% na 2 roky.
b) 100000 Kč uložených s úrokem 2,5% na 10 let.
c) 1000000 Kč uložených s úrokem 3% na 20 let.

V předchozím příkladě jsme zjistili, že po x letech spoření s počátečním vkladem 2 Kč na tříprocentní úrok budeme mít naspořeno $2(1+0,03)^x$ Kč.

Porovnáním vzorce se zadanými veličinami vidíme, že při počátečním vkladu n_0, úroku p a době spoření t našetříme $n_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ Kč.

počáteční vklad n_0	**úrok** p **%**	**délka spoření** t	**dosazení**	**naspořená částka**
10000	1,5	2	$10000\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^2$	10302, 30
100000	2,5	10	$100000\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^{10}$	128008, 50
1000000	3	20	$1000000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{20}$	1806111, 20

Pedagogická poznámka: Nejvíce chyb se při sestavování vzorců vyskytuje kolem procent. Všem chybujícím doporučuji, aby si svůj vzorec vyzkoušeli dosazením konkrétních čísel z předchozího zadání.

Poznámka: Stejně jako u předchozího příkladu je vidět, že na velikost naspořené částky má největší vliv doba spoření.

Poznámka: Odvozený vzorec $n = n_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ se standardně používá ve finanční matematice pro takzvané složené úrokování (případ, se kterým jsme počítali. Úroky se nevybírají, ale přidávají se k uložené částce). Další vzorce finanční matematiky budeme probírat později, každopádně tento vzorec je příkladem **znalosti opravdu použitelné i v reálném životě**.

Peníze uložené do banky nesou zisk ve formě úroků.
Bohužel peníze uložené i neuložené také ztrácejí hodnotu díky inflaci (zdražování zboží, všechno stojí víc, než kolik to stálo před několika lety).
Inflace se stejně jako úroky udává v procentech. Pokud je roční míra inflace 5%, znamená to, že zboží, které na začátku roku stálo 100 Kč, bude na konci roku stát 105 Kč $\Rightarrow$ za 100 Kč nakoupíte na konci roku méně než byste nakoupili na začátku roku. Peníze ztrácejí hodnotu.

Př. 3: Poločas rozpadu radonu ${}^{219}_{86}Rn$ je $4\,\mathrm{s}$. Na počátku pokusu byly 2 g. Urči jaké množství radonu zbylo 2,5 minutách.

Radioaktivní látky se v přírodě rozpadají samovolně tak, že bez ohledu na množství látky se po uplynutí určité doby rozpadne vždy polovina atomů. (jde o důsledek toho, že si atomy nepamatují svůj věk) Tato doba je u každého druhu atomů jiná a nazývá se poločas rozpadu.
po 0 s ……. $2\,\mathrm{g}$
Co se stane po 1 s nevíme, ale víme, co bude po 4 s.
po 4 s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)
Další okamžik, kdy budeme vědět, co se děje, přijde opět za 4 s, tedy v 8s od začátku pokusu.
po 8 s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (z poloviny atomů, které zbyly po prvních čtyřech sekundách, se rozpadla zase polovina)
po 12 s……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$
Teď bychom dokázali určit množství látky vždy, když je čas násobkem čtyř, ale my potřebujeme vztah, do kterého se dá dosadit jakýkoliv čas.
V exponentu mocniny je vždy čtyřikrát menší číslo, než je dosazovaný čas. $\Rightarrow$
po x s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$
Můžeme dosadit:
Po 150 s $x=150 \Rightarrow m = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{150}{4}} = 1{,}03\cdot10^{-11}\,\mathrm{g}$.
Po 150 s zbude z 2 g radonu ${}^{219}R$ pouze $1{,}03\cdot10^{-11}\,\mathrm{g}$.

Pedagogická poznámka: Sestavení závislosti bývalo vždy problémem. Třídy vyučované podle učebnic je zvládají velmi dobře. Mám pocit, že když dostanou volnost najdou si všichni pohled, který jim vyhovuje a pomocí kterého příklady vyřeší.

Poznámka: Kamenem úrazu při řešení těchto příkladů bývá určení výrazu v exponentu. Pokud přímý postup použitý v řešení příkladu nestačí můžeme se pokusit i jinak:

Dělit intervaly na „čtyřsekundy“:

po $4\,\mathrm{s}$ ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$

po $8\,\mathrm{s}=2\cdot4\,\mathrm{s}$ ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

po $12\,\mathrm{s}=3\cdot4\,\mathrm{s}$ ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Číslo v exponentu označuje počet čtyřsekundových intervalů, které uplynuly od začátku pokusu. $\Rightarrow$ Těchto intervalů je $\frac{x}{4}$. $\Rightarrow$ Po x s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Použít neznámou:

V exponentu je určitě násobek času $\Rightarrow$ po t s …. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t\cdot k}$

Konstantu k určíme z toho, co už víme:

po 4 s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t\cdot k}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4\cdot k}$ $\Rightarrow$ $4k=1\Rightarrow k=\frac{1}{4}$

po 8 s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t\cdot k}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8\cdot k}$ $\Rightarrow$ $8k=2\Rightarrow k=\frac{1}{4}$

po x s ……. $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$

Z předchozího příkladu je dobře vidět, proč ho nemůžeme řešit přímou úměrností. Pokud bychom ji použili vyšlo by:

po 4s … 1g (se rozpadne)
po 8s … x g

$\frac{x}{1}=\frac{8}{4}=2\,g$ $\Rightarrow$ Po 8 s už nezbude ani jeden atom $\Rightarrow$ mezi 5. a 8. sekundou se nerozpadl každý druhý, ale všechny atomy, které se nestihly rozpadnout během prvních čtyř sekund. Což je v rozporu s významem poločasu rozpadu. Přímá úměrnost totiž předpokládá, že každé čtyři sekundy se rozpadne stejný počet atomů (stejná hmotnost látky), což je v rozporu se skutečností, neboť během jednoho poločasu rozpadu se vždy rozpadne stejná část atomů (a tedy v případě menšího množství látky se rozpadne méně atomů).

Př. 4: Poločas rozpadu látky ${}^{A}X$ je $0{,}5\,\mathrm{s}$. Urči jaké množství látky X zbylo po 2,5 minutě z 10 g na začátku pokusu.

po 0 s ……. $10\,\mathrm{g}$

Další okamžik, ve kterém známe situaci, je už po 0,5 s.

po 0,5 s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ (rozpadla se polovina atomů)

po 1 s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (rozpadla se polovina z poloviny atomů) po 1,5 s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

po 2 s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Číslo v exponentu je vždy dvakrát větší než čas. $\Rightarrow$

po x s ……. $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

Můžeme dosadit: 2,5 minuty = 150 s.

po 150 s $x=150 \Rightarrow m=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 150}=4,9\cdot 10^{-90}$ g.

Po 150 s zbude z 10 g látky X pouze $4,9\cdot 10^{-90}$ g.

Poznámka: K příkladu je možné se vrátit ve fyzice. Náš matematický model s poločasem rozpadu uvažuje látku jako spojité prostředí obsahující „nekonečné“ množství částic. Tento předpoklad je velice dobře splněn pro „rozumné“ hmotnosti, ale rozhodně neplatí pro $4,9\cdot 10^{-90}$ g, což je hmotnost o desítky řádů menší než hmotnost elementárních částic (hmotnost protonu $m_p=1,67\cdot 10^{-27}$ kg $=1,67\cdot 10^{-24}$ g).

Př. 5: Vysvětli, jak je možné, že ve vztahu odvozeném pro množství látky v předchozím příkladě se na rozdíl od předchozího příkladu s radonem ^{219}R nevyskytuje poločas rozpadu látky *X*.

Zkusíme okopírovat postup z příkladu s radonem.

Pro radon platí: poločas rozpadu $T=4$ s, počáteční množství $m_0=2$ g.

Odvozený vzorec $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}$.

Pro látku *X* platí: poločas rozpadu $T=0,5$ s, počáteční množství $m_0=10$ g.

Dosadíme do vzorce odvozeného pro radon (ale platícího obecně):

$$m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{0,5}}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{\frac{1}{2}}}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

V vzorci odvozeném pro látku *X* se poločas rozpadu vyskytuje také, ale v upravené hodnotě převráceného čísla. Vzorec $m=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}$ platí obecně pro rozpad všech radioaktivních látek.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti sami řeší příklad 5 nápodobou s příkladem 4 (řešením je vztah $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{0,5}}$), pak pro ně předchozí příklad samozřejmě není žádným přínosem.

Př. 6: Intenzita rentgenových paprsků se sníží na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Jak se změní intenzita paprsků, pokud projdou olověnou deskou o tloušťce 50 mm?

po 0 mm ……. 1

po $13,5\,\text{mm}$ ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$ (intenzita se snížila na polovinu)

po $2\cdot(13,5)\,\text{mm}$ ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (intenzita se snížila na polovinu poloviny)

po $3\cdot(13,5)\,\text{mm}$ ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

po x mm ……. $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$

Můžeme dosadit: po 50 mm $x=50 \Rightarrow I=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{13,5}}=0,077$.

Po průchodu olověnou deskou o tloušťce 50 mm se intenzita paprsků sníží na 7,7% původní hodnoty.

Př. 7: Urči tloušťku olověné desky, která zeslabí intenzitu rentgenových paprsků na desetinu původní hodnoty. Využij údaje z předchozího příkladu.

Pro intenzitu rentgenových paprsků při průchodu olovem platí: $I=I_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$.

Pokud se paprsky zeslabí na desetinu původní intenzity, platí: $I=\frac{1}{10}I_0$. Dosadíme:

$$I_0\frac{1}{10}=I_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$$

$$\frac{1}{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$$

Dál nedokážeme úlohu řešit, neumíme shodit x z exponentu.

Výsledek bychom mohli odhadnout: $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}>\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow$ hodnota výrazu $\frac{x}{13,5}$ patří do intervalu $(3;4)$ a z ní můžeme přibližně určit x.

Přesně to však zatím neumíme. Potřebovali bychom vědět na co umocnit $\frac{1}{2}$, aby vyšla $\frac{1}{10}$.

Př. 8: Zkorumpovaný politik vyšmelil při zadávání zakázek na ministerstvu obrany 10 miliónů. Protože platí zákon o přiznávání příjmů, nemůže peníze uložit do banky a přechovává je doma ve zlaceném slamníku. Urči kupní sílu přechovávaných peněz po 20 letech, pokud inflace bude dosahovat průměrně 5% ročně.

Nejdříve určíme kolik peněz bude nutné po dvaceti letech na nákup zboží v hodnotě 10 miliónů v současnosti. Poté přepočítáme hodnotu neúročených 10 miliónů.
Kolik peněz potřebujeme na nákup zboží, které mělo na začátku cenu 10 miliónů.

po 1. roce ……. $10^7 \cdot 1,05$

po 2. letech ……. $\left(10^7 \cdot 1,05\right)1,05 = 10^7 \cdot 1,05^2$ (na počátku roku by bylo potřeba $10^7 \cdot 1,05$ Kč)

po 3. letech ……. $10^7 \cdot 1,05^3$

po x. letech ……. $10^7 \cdot 1,05^x$

Teď můžeme dosadit 20 let a určit množství peněz v hodnotě 10 miliónů.

po 20. letech ……. $10^7 \cdot 1,05^{20} = 26532977$ Kč

Po dvaceti letech potřebujeme 26 532 977 Kč na nákup zboží, které před tím stálo 10000000 Kč. kupní sílu neúročených 10 miliónů spočteme přímou úměrností:

26 532 977 Kč … 10 000 000 Kč
10 000 000 Kč … x Kč

$$\frac{x}{10000000} = \frac{10000000}{26532977} \Rightarrow x = 10000000 \cdot \frac{10000000}{26532977} = 3768895 \text{ Kč}$$

Při pětiprocentní inflaci bude mít za dvacet let 10 miliónů Kč stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 3768895 Kč (peníze tak ztratí přes 62% své hodnoty).

Poznámka: Předchozí příklad se často řeší (podle mě nesprávně) ubýváním hodnoty peněz takto:
Roční míra inflace 5% znamená, že peníze ztratí 5% hodnoty $\Rightarrow$ 95% hodnoty si zachovají.

počáteční částka … 10^7 Kč

po 1. roce … $10^7 \cdot 0,95$

po 2. letech … $\left(10^7 \cdot 0,95\right)0,95 = 10^7 \cdot 0,95^2$ (na počátku roku má jenom $10^7 \cdot 0,95$ Kč)

po 3. letech … $10^7 \cdot 0,95^3$

po x. letech … $10^7 \cdot 0,95^x$

Teď můžeme dosadit za čas 20 let a určit hodnotu peněz.

po 20. letech ……. $10^7 \cdot 0,95^{20} = 3584859,20$ Kč

Po 20 letech bude hodnota peněz už pouze 3 584 859,20 Kč.

Shrnutí: Pokud se při nějakém ději mění množství o stále stejnou část aktuálního množství, jde o exponenciální závislost.