2.9.6 Exponenciální rovnice III

Předpoklady: 2905

Př. 1: Vyřeš rovnici $2^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{2}{9}$.

Problém: Zdá se, že máme dva výrazy na substituci $a=2^x$ a $b=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Taková substituce nemá smysl, v rovnici by se objevily dvě neznámé místo jedné (našli bychom nekonečně mnoho dvojic řešení a nevěděli bychom co dál) $\Rightarrow$ musíme ze dvou výrazů udělat jeden $\Rightarrow 2^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{9}$$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)a-a=\frac{2}{9}$

$$\frac{1}{2}a=\frac{2}{9}$$

$$a=\frac{4}{9}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a=\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$x=2$ $\qquad K=\{2\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $20\cdot 2^x-2^{x+1}=3^{x+2}-3^x$.

Problém: Zdá se, že máme dva výrazy na substituci $a=2^x$ a $b=3^x$. Taková substituce nemá smysl, v rovnici by se objevily dvě neznámé místo jedné $\Rightarrow$ musíme ze dvou výrazů udělat jeden $\Rightarrow$ vydělíme rovnici výrazem 3^x $\Rightarrow$ na pravé straně se exponenty s *x* vykrátí, na levé straně zbudou zlomky.

$$20\cdot 2^x-2^{x+1}=3^{x+2}-3^x \quad /:3^x$$

$$20\cdot\frac{2^x}{3^x}-\frac{2^{x+1}}{3^x}=\frac{3^{x+2}}{3^x}-\frac{3^x}{3^x}$$

$$20\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-2\left(\frac{2}{3}\right)^x=9\cdot 1-1$$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a \Rightarrow 20a-2a=8$.

$18a=8$

$a=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

Návrat k původní proměnné:

$a=\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{4}{9}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$x=2$ $\qquad K=\{2\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $3\cdot 5^{x-2}+7\cdot 5^{x-3}=5\cdot 3^{x-3}+5^{x-1}$.

Podobné jako předchozí příklad. Jakým výrazem vydělit?

Nejvýhodnější: $5^{x-3} \Rightarrow$ zbude jediný výraz s neznámou a nezískáme zlomky.

$3\cdot 5^{x-2}+7\cdot 5^{x-3}=5\cdot 3^{x-3}+5^{x-1} \quad / :5^{x-3}$

$3\cdot\frac{5^{x-2}}{5^{x-3}}+7\cdot\frac{5^{x-3}}{5^{x-3}}=5\cdot\frac{3^{x-3}}{5^{x-3}}+\frac{5^{x-1}}{5^{x-3}}$

$3\cdot 5+7\cdot 1=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}+25 \Rightarrow$ ani nemusíme substituovat.

$-3=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$

$-\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$ $\qquad$ Pravá strana: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}>0 \Rightarrow$ rovnice nemá řešení (levá strana: $-\frac{3}{5}<0$)

$K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Zvolení výrazu k vydělení si určitě zaslouží společnou diskusi se třídou. Jde o dobrou ukázku toho, jak je výhodné „myslet dopředu“.

Studenti často dojdou k výsledku $\left(-\frac{3}{5}\right)^1=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} \Rightarrow x=4$. Svou roli hraje i fakt, že zatím všechny rovnice měly řešení.

Dodatek: Závěrečnou úvahu jsme mohli udělat už o krok dříve u rovnosti $-3=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$.

Př. 4: Vyřeš rovnici $3\cdot 2^{2-x}+2\cdot 2^{1-x}=8\cdot 3^{2-x}+3\cdot 3^{1-x}$.

Podobné jako předchozí příklad.

$3\cdot 2^{2-x}+2\cdot 2^{1-x}=8\cdot 3^{2-x}+3\cdot 3^{1-x} \quad / 3^{2-x}$

$$3\cdot\frac{2^{2-x}}{3^{2-x}}+2\cdot\frac{2^{1-x}}{3^{2-x}}=8\cdot\frac{3^{2-x}}{3^{2-x}}+3\cdot\frac{3^{1-x}}{3^{2-x}}$$

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}+2\cdot\frac{2^{2-x-1}}{3^{2-x}}=8\cdot 1+3\cdot\frac{1}{3}$$

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=8\cdot 1+3\cdot\frac{1}{3}$$

Substituce: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=a \;\Rightarrow\; 3a+a=9$

$$4a=9$$

$$a=\frac{9}{4}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a=\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=\frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$2-x=-2$$

$x=4$ $\qquad K=\{4\}$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde o překonání psychické bariéry ze záporného *x*.

Př. 5: Vyřeš rovnici $2\cdot 4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}+2^{2x-1}$.

Hledáme výraz na substituci:

- Rovnice obsahuje tři základy $\Rightarrow$ určitě musíme jeden ze základů převést na druhý (zřejmě $4\leftrightarrow 2$) a budeme jedním ze získaných výrazů dělit.
- Snažíme se o takovou substituci, aby po jejím provedení rovnice byla rovnice co nejjednodušší (například neobsahovala odmocniny).

Zkusíme, zda půjde $3^{x-\frac{1}{2}}=a$ $\Rightarrow$ musíme se snažit ve všech členech vyrobit exponent $x-\frac{1}{2}$.

- $3^{x+\frac{1}{2}}=3^{x-\frac{1}{2}+1}=3\cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$
- $2^{2x-1}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-1}=4^{\frac{2x-1}{2}}=4^{x-\frac{1}{2}}$
- $4^{x}=4^{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}=2\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}$

Dosadíme do rovnice:

$$2\cdot 2\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}-3^{x-\frac{1}{2}}=3\cdot 3^{x-\frac{1}{2}}+4^{x-\frac{1}{2}} \qquad /:4^{x-\frac{1}{2}}$$

$$4\cdot\frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}}-\frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}}=3\cdot\frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}}+\frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{4^{x-\frac{1}{2}}}$$

$$4-\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}}=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}}+1$$

Substituce: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}}=a \Rightarrow 4-a=3a+1$

$3=4a$

$a=\frac{3}{4}$

Návrat k původní proměnné:

$a=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

$x-\frac{1}{2}=1$

$x=\frac{3}{2}$ $\qquad K=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Pedagogická poznámka: Příklad je zajímavý kvůli volbě substituce. Pokud ho nestihnete normálním průchodem, zkuste si s třídou probrat alespoň použitou substituci.

Př. 6: Vyřeš rovnici $9^{x+1}+5\cdot 6^x=4^{x+1}$.

Problém: Zdá se, že máme dokonce tři výrazy na substituci $a=9^x$, $b=6^x$ a $c=4^x$. Taková substituce nemá smysl, v rovnici by se objevily tři neznámé místo jedné $\Rightarrow$ ze tří výrazů uděláme dva (pak budeme mít podobný příklad, jako jsou předchozí) $\Rightarrow$ platí $6^x=2^x\cdot 3^x$.

$9^{x+1}+5\cdot 2^x\cdot 3^x=4^{x+1}$ (zkusíme převést i $9^x=3^x\cdot 3^x$ a $4^x=2^x\cdot 2^x$)

$9\cdot 9^x+5\cdot 2^x\cdot 3^x=4\cdot 4^x$

$9\cdot 3^x\cdot 3^x+5\cdot 2^x\cdot 3^x=4\cdot 2^x\cdot 2^x$

$\Rightarrow$ Vydělíme rovnici výrazem $2^x\cdot 2^x$ $\Rightarrow$ na pravé straně se exponenty s *x* vykrátí, na levé straně zbudou zlomky.

$9\cdot 3^x\cdot 3^x+5\cdot 2^x\cdot 3^x=4\cdot 2^x\cdot 2^x \quad /:\left(2^x\cdot 2^x\right)$

$$9\cdot\frac{3^x\cdot 3^x}{2^x\cdot 2^x}+5\cdot\frac{2^x\cdot 3^x}{2^x\cdot 2^x}=4\cdot\frac{2^x\cdot 2^x}{2^x\cdot 2^x}$$

$$9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x=4\cdot 1$$

Substituce: $\left(\frac{3}{2}\right)^x=a \Rightarrow 9a\cdot a+5a=4$.

$9a^2+5a-4=0$

$$a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 9\cdot(-4)}}{2\cdot 9}=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{18}=\frac{-5\pm 13}{18}$$

$a_1=\frac{-5+13}{18}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$ $\qquad a_2=\frac{-5-13}{18}=-1$

Návrat k původní proměnné:

$a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \frac{4}{9}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

$x_1 = -2$

$K = \{-2\}$

$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} = -1$

žádné řešení $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ (každá mocnina kladného čísla je kladná)

Př. 7: Vyřeš rovnici $4 \cdot 16^x + 4^{x+1} = 2 \cdot 8^{x+1} + 2^{3x}$.

Problém: V rovnici je několik různých základů mocnin, všechny základy jsou mocninami dvojky $\Rightarrow$ všechny základy převedeme na mocniny dvou.

$4 \cdot 16^x + 4^{x+1} = 2 \cdot 8^{x+1} + 2^{3x}$

$4 \cdot \left(2^4\right)^x + \left(2^2\right)^{x+1} = 2 \cdot \left(2^3\right)^{x+1} + 2^{3x}$

$4 \cdot 2^{4x} + 2^{2x+2} = 2 \cdot 2^{3x+3} + 2^{3x}$ (upravíme exponenty tak, aby obsahovaly jenom násobky x)

$4 \cdot 2^{4x} + 2^2 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 2^3 \cdot 2^{3x} + 2^{3x}$

Při substituci $a = 2^x$ bychom získali příliš velké mocniny $\Rightarrow$ vydělíme rovnici výrazem 2^{2x}.

$4 \cdot 2^{4x} + 4 \cdot 2^{2x} = 16 \cdot 2^{3x} + 2^{3x} \quad / : 2^{2x}$

$4 \cdot \frac{2^{4x}}{2^{2x}} + 4 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 16 \cdot \frac{2^{3x}}{2^{2x}} + \frac{2^{3x}}{2^{2x}}$

$4 \cdot 2^{2x} + 4 = 16 \cdot 2^x + 2^x$

Substituce: $2^x = a \Rightarrow 4a^2 + 4 = 16a + a$

$4a^2 - 17a + 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$

$a_1 = \frac{17+15}{8} = \frac{32}{8} = 4$

$a_2 = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4}$

Návrat k původní proměnné:

$a_1 = 2^{x_1} = 4$

$2^{x_1} = 2^2$

$x_1 = 2$

$a_2 = 2^{x_2} = \frac{1}{4}$

$2^{x_2} = 2^{-2}$

$x_2 = -2$

$K = \{-2; 2\}$

Př. 8: Petáková:
strana 34/cvičení 4 b) c) d)
strana 34/cvičení 5 a) b)

Shrnutí: V některých případech můžeme připravit rovnici k substituci vydělením.