

2.9.8 Exponenciální nerovnice I

Předpoklady: 2906

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2^t \geq \sqrt{2}$. Ověř pomocí zkoušky pro dvě čísla z množiny řešení předchozí nerovnice jeho správnost.

$$2^t \geq 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{Podobně jako u rovnic teď vystoupíme z mocnin.}$$
$$t \geq \frac{1}{2} \quad K = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$$

Teď ověření:

$$t = 1 \quad t = 5123$$
$$2^1 \geq \sqrt{2} \quad 2^t \geq \sqrt{2}$$
$$2^1 \geq \sqrt{2} \quad - \text{ platí} \quad 2^{5132} \geq \sqrt{2} \quad - \text{ platí}$$

Zdá se, že vše je v pořádku.

Toto nebyla zkouška. I když ověření pro obě čísla vyjde, neznamená to bez další diskuse, že řešení je v pořádku.

Pedagogická poznámka: Pro zdar hodiny je důležité, aby alespoň část studentů řešila příklad tak, jak je naznačeno dále (bez úprav levé strany). Za normální situace většina studentů postupuje způsobem naznačeným v učebnici, menšina provede úpravu levé strany na základ 2. Je to ideální situace, protože obě skupiny získají různé výsledky a třída se může dát do zkoumání tohoto rozporu.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 2$. Ověř pomocí zkoušky pro dvě čísla z množiny řešení předchozí nerovnice jeho správnost.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \text{Podobně jako u rovnice teď vystoupíme z mocnin.}$$
$$t \leq -1 \quad K = (-\infty; -1)$$

Teď ověření:

$$t = -2 \quad t = -4$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \leq 2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \leq 2$$
$$4 \leq 2 \quad \text{To ale neplatí!!!!} \quad 16 \leq 2 \quad \text{To ale neplatí!!!!}$$

Předchozí ověření jasně ukázalo, že náš výsledek $K = (-\infty; -1)$ je špatný. Zkusíme, jak dopadnou čísla, která jsme jako řešení neurčili (tedy čísla z intervalu $\langle -1; \infty \rangle$).

$$t = 1 \quad t = 2$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq 2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq 2 \quad \text{To platí!!!! (ale nemělo by)}$$

$$\frac{1}{4} \leq 2 \quad \text{To platí!!!! (ale nemělo by)}$$

Dostali jsme se do zmatené situace. U nerovnice $2^t \geq \sqrt{2}$ je naše řešení zřejmě správné, u nerovnice $\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 2$ je situace zřejmě přesně obrácená, než jsme spočítali.

Kde je chyba?

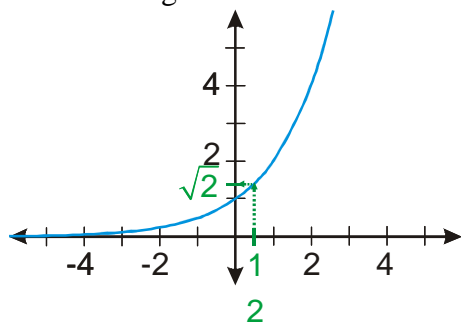
Nezbývá než se vrátit k exponenciálním funkcím a vyřešit oba příklady pomocí grafů.

$$2^t \geq \sqrt{2}$$

$$2^t \geq 2^{\frac{1}{2}}$$

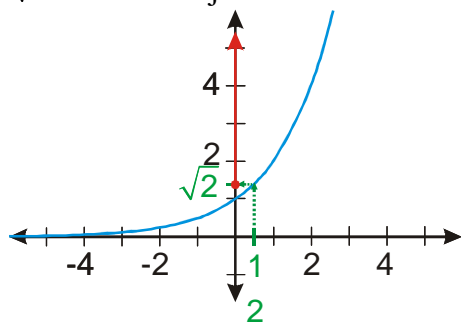
Porovnáváme hodnoty funkce $y = 2^x$, pro číslo $\frac{1}{2}$ a neznámá čísla t . Funkce $y = 2^x$ má mít pro t hodnotu větší než $\sqrt{2}$.

Nakreslíme graf:



Z čísla $\frac{1}{2}$ vyrobila funkce $y = 2^x$ číslo $\sqrt{2}$.

Hledáme hodnoty (jsou na ose y) větší než $\sqrt{2}$. Označíme je červeně.



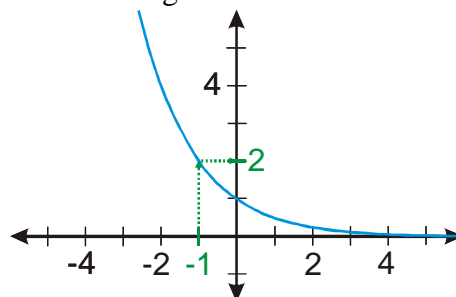
Zpětně hledáme, z jakých čísel tyto hodnoty vznikly.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

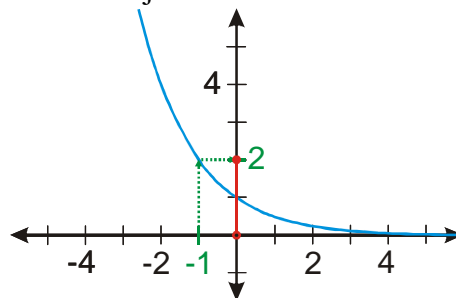
Porovnáváme hodnoty funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, pro číslo -1 a pro neznámá čísla t . Funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ má mít pro t hodnotu menší než 2.

Nakreslíme graf:

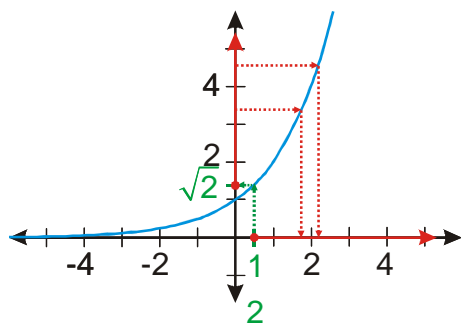


Z čísla -1 vyrobila funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ číslo 2.

Hledáme hodnoty (jsou na ose y) menší než 2. Označíme je červeně.

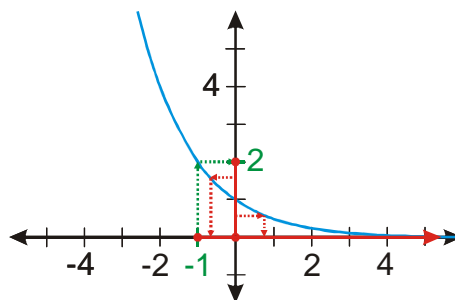


Zpětně hledáme, z jakých čísel tyto hodnoty vznikly.



Vznikly z hodnot $t \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Funkce $y = 2^x$ je rostoucí, z větších hodnot x dělá větší hodnoty y (zachovává nerovnost x pro hodnoty y) \Rightarrow při vystupování z mocnin nerovnost zachováme.



Vznikly z hodnot $t \in \langle -1; \infty \rangle$.

Funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ je klesající, z větších hodnot x dělá menší hodnoty y (obrací nerovnost x pro hodnoty y) \Rightarrow při vystupování z mocnin nerovnost obrátíme.

Pedagogická poznámka: Ideální by bylo, kdyby studenti nakreslili grafy a udělali rozbor sami. Čas by na to být mohl, stačí, když studenti stihnou do konce hodiny příklad 3.

Na předchozích pravidlech není nic překvapivého. Už v úvodu k nerovnicím jsme si ukázali, že funkce, které odpovídají úpravám nerovnic, u kterých nemusíme obracet znaménko, musí být rostoucí (aby zachovávaly nerovnost). Úpravy, které vyžadují obrácení znaménka, naopak reprezentují funkce klesající (jako například funkce $y = -x$, která reprezentuje vynásobením číslem (-1)).

Při řešení exponenciálních nerovnic ve chvíli, kdy opouštíme exponenciální vyjádření:

- Pokud je základ větší než 1, zachováváme znaménko nerovnosti.
- Pokud je základ menší než 1, obrácíme znaménko nerovnosti.

Př. 3: Vyřeš exponenciální nerovnice:

a) $3^{x+5} < 1$ b) $0,1^{2x} \leq 1$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$ d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+3} \leq 16$

a) $3^{x+5} < 1$

$3^{x+5} < 3^0$

Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$x+5 < 0$

$x < -5$

$K = (-\infty, -5)$

b) $0,1^{2x} \leq 1$

$0,1^{2x} \leq 0,1^0$

Základ mocniny je menší než jedna \Rightarrow nerovnost se u exponentů mocnin obrací.

$2x \geq 0$

$x \geq 0$

$K = \langle 0, \infty \rangle$

$$c) \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$$

$$K = R$$

Všechny mocniny kladného čísla jsou kladná čísla.

$$d) \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+3} \leq 16$$

$$(2^{-3})^{2x+3} \leq 2^4$$

Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$$2^{-6x-9} \leq 2^4$$

$$-6x - 9 \leq 4$$

$$-6x \leq 13$$

$$x \geq -\frac{13}{6}$$

$$K = \left(-\frac{13}{6}; \infty\right)$$

Pedagogická poznámka: Největší problémy jsou s řešením bodu c), kde studenti nedokážou napsat 0 jako mocninu jedné pětiny. Opět jim nejdřív připomínám, aby si uvědomili význam mocniny.

Př. 4: Vyřeš nerovnice:

$$a) 2 \cdot 2^x \cdot 4^x > \sqrt{8}$$

$$b) 0,1^{x+2} > 0,01^{x+3}$$

$$a) 2 \cdot 2^x \cdot 4^x > \sqrt{8} \quad \text{Převědeme nerovnici na tvar } 2^{\text{výraz1}} > 2^{\text{výraz2}}.$$

$$2 \cdot 2^x \cdot (2^2)^x > (2^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$2 \cdot 2^x \cdot 2^{2x} > 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2^{1+x+2x} > 2^{\frac{3}{2}}$$

Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$$3x + 1 > \frac{3}{2}$$

$$6x + 2 > 3$$

$$x > \frac{1}{6}$$

$$K = \left(\frac{1}{6}; \infty\right)$$

$$b) 0,1^{x+2} > 0,01^{x+3} \quad \text{Převědeme nerovnici na tvar } 0,1^{\text{výraz1}} > 0,1^{\text{výraz2}}.$$

$$0,1^{x+2} > (0,1^2)^{x+3}$$

$$0,1^{x+2} > 0,1^{2x+6}$$

Základ mocniny je menší než jedna \Rightarrow nerovnost mezi exponenty mocnin se obrací.

$$x + 2 < 2x + 6$$

$$x > -4$$

$$K = (-4; \infty)$$

Př. 5: Petáková:
strana 37/cvičení 26 f)
strana 37/cvičení 27 d) e)

Shrnutí: Při opuštění exponenciálního vyjádření musíme postupovat podle základu mocnin.
Pokud je základ menší než 1, obracíme znaménko nerovnosti.