

2.9.9 Exponenciální nerovnice II

Předpoklady: 2908

Pedagogická poznámka: Všechny příklady v této hodině řeší studenti samostatně. Ti, kteří dokáží spočítat všechno, jsou odměněni plusem. Většinou není potřeba nikomu moc pomáhat, v první fázi se snažím, aby si studenti uvědomili, že i při řešení nerovnic mohou používat triky, které mají v arzenálu na řešení exponenciálních rovnic.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2^{x+2} \leq 6\sqrt{2} + 2^x$.

$$2^{x+2} \leq 6\sqrt{2} + 2^x$$

$$2^x \cdot 2^2 \leq 6\sqrt{2} + 2^x$$

Substituce: $2^x = a$

$$a \cdot 4 \leq 6\sqrt{2} + a$$

$$4a \leq 6\sqrt{2} + a$$

$$3a \leq 6\sqrt{2}$$

$$a \leq 2\sqrt{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$2^x = a \leq 2\sqrt{2}$$

$$2^x \leq 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$$x \leq \frac{3}{2} \qquad K = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{2^{x^2}}{2^{5x}} \leq \frac{1}{16}$.

$$\frac{2^{x^2}}{2^{5x}} \leq \frac{1}{16}$$

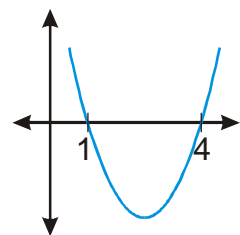
$$2^{x^2-5x} \leq 2^{-4}$$

Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$$x^2 - 5x \leq -4$$

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$(x-4)(x-1) \leq 0 \Rightarrow$ Nulové body grafu: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.



Hledáme části grafu pod osou x . $\Rightarrow K = \langle 1, 4 \rangle$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\frac{4^x}{2^{5x}} \leq 16$.

$$\frac{4^x}{2^{5x}} \leq 16$$

$$\left(\frac{2^2}{2^5}\right)^x \leq 16$$

$$(2^{-3})^x \leq 16$$

$$2^{-3x} \leq 2^4$$

Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.

$$-3x \leq 4$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

$$K = \left\langle -\frac{4}{3}; \infty \right\rangle$$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $4^x + 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$.

$$4^x + 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$$

Nerovnice nemá řešení, všechny členy na levé straně jsou kladná čísla, jejich součet musí být větší než nula.

Pedagogická poznámka: Většina studentů řeší rovnici klasicky. Teprve ve chvíli, kdy dojdou k řešení, je vyzvu, aby si rozmysleli, zda nemohli k výsledku dojít rychleji.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $0,25^x - 0,5^x - 2 \leq 0$.

$$0,25^x - 0,5^x - 2 \leq 0$$

Protože platí: $0,25 = 0,5^2 \Rightarrow$ pokusíme se o substituci $y = 0,5^x$.

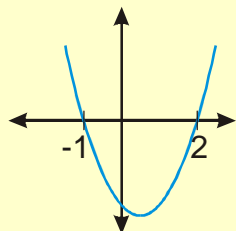
$$(0,5^2)^x - 0,5^x - 2 \leq 0$$

$$(0,5^x)^2 - 0,5^x - 2 \leq 0$$

Substitute: $y = 0,5^x$.

$$y^2 - y - 2 \leq 0$$

$$(y-2)(y+1) \leq 0 \Rightarrow \text{Nulové body grafu: } y_1 = -1, y_2 = 2.$$



Hledáme části grafu pod osou x : $y \in \langle -1; 2 \rangle$.

Návrat k původní proměnné:

$$0,5^x = y \in \langle -1; 2 \rangle$$

Přepíšeme interval hodnot $0,5^x$ pomocí nerovnic:

$0,5^x \in \langle -1; 2 \rangle \Leftrightarrow 0,5^x \geq -1$ a zároveň $0,5^x \leq 2$	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení	
$0,5^x \geq -1$ Podmínka je splněna vždy, $0,5^x > 0$. $K_1 = R$	$0,5^x \leq 2$ $0,5^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 0,5^{-1}$ Základ mocniny je menší než jedna \Rightarrow nerovnost mezi exponenty mocnin se obrací. $x \geq -1$ $K_2 = \langle -1; \infty \rangle$

Hledáme průnik množin $K_1 = R$ a $K_2 = \langle -1; \infty \rangle \Rightarrow K = K_1 \cap K_2 = \langle -1; \infty \rangle$

Pedagogická poznámka: Kritickým bodem předchozího příkladu je návrat ze substituce.

Nejdříve poradím studentům pouze to, aby interval přepsali na nerovnice, s těmi, kterým pouhé přepsání do nerovnic nestačí, poté řešíme, jestli získáme výsledek jako průnik nebo sjednocení.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $3 \cdot 9^x - 3^{x+3} \geq 3^x - 9$.

Pokusíme se o substituci $y = 3^x$.

$$3 \cdot (3^2)^x - 3^3 \cdot 3^x \geq 3^x - 9$$

$$3 \cdot (3^x)^2 - 3^3 \cdot 3^x \geq 3^x - 9$$

Substituce: $y = 3^x$.

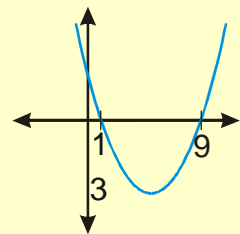
$$3y^2 - 27y \geq y - 9$$

$$3y^2 - 28y + 9 \geq 0$$

Hledáme nulové body grafu z kvadratické rovnice:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6}$$

$$y_1 = \frac{28+26}{6} = 9 \quad y_2 = \frac{28-26}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Nulové body grafu: } y_1 = 9, y_2 = \frac{1}{3}.$$



Hledáme části grafu nad osou x : $y \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \langle 9; \infty \rangle$.

Návrat k původní proměnné:

$$3^x = y \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \langle 9; \infty \rangle$$

Přepíšeme intervaly hodnot 3^x pomocí nerovnic:

$$3^x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \langle 9; \infty \rangle \Leftrightarrow 3^x \leq \frac{1}{3} \text{ nebo } 3^x \geq 9$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, stačí, když platí jedna z nich \Rightarrow výsledek získáme jako sjednocení jejich řešení.

$3^x \leq \frac{1}{3}$ $3^x \leq 3^{-1}$ <p>Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.</p> $x \leq -1$ $K_1 = (-\infty; -1)$	$3^x \geq 9$ $3^x \geq 3^2$ <p>Základ mocniny je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se zachovává i mezi exponenty mocnin.</p> $x \geq 2$ $K_2 = \langle 2; \infty \rangle$
--	--

Hledáme sjednocení množin $K_1 = (-\infty; -1)$ a $K_2 = \langle 2; \infty \rangle$.

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -1) \cup \langle 2; \infty \rangle$$

Př. 7: Petáková:
strana 37/cvičení 28 c) d) e)

Shrnutí: Při návratu ze substituce je užitečné přepsat interval pomocí nerovnic.