2.9.11 Logaritmus

Předpoklady: 2909

Pedagogická poznámka: Následující příklady vyžadují tak jeden a půl vyučovací hodiny. V případě potřeby však stačí dojít k příkladu 6 a zbytek jen ukázat, což se dá za jednu hodinu stihnout (nedoporučuji).

Pedagogická poznámka: Je potřeba, aby studenti počítali logaritmy sami. Nedělá jim to problémy, jen na úplném začátku je třeba několika jednotlivcům zopakovat, co logaritmus znamená.

Při řešení příkladů na exponenciální závislosti i při řešení některých rovnic, jsme nebyli schopni určit výsledek. Podobnou situaci jsme už zažili při umocňování. Srovnáme obě situace na rovnicích:

Kdy to šlo:

$x^3 = 27 \Rightarrow$ Hledáme číslo, které se po umocnění na třetí bude rovnat 27.

$x^3 = 3^3$

$x = 3$

$2^x = 8 \Rightarrow$ Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8.

$2^x = 2^3$

$x = 3$

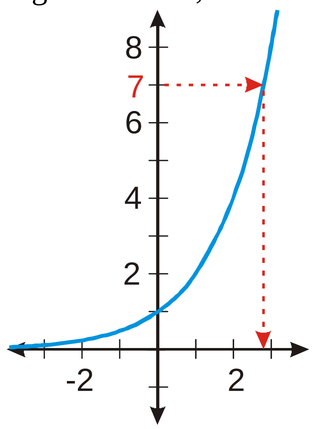
Kdy to nešlo:

$x^3 = 20 \Rightarrow$ Hledáme číslo, které se po umocnění na třetí bude rovnat 20.
Nemáme takové číslo k dispozici (žádné nám dosud známé číslo se po umocnění na třetí nerovná 20).

$x = \sqrt[3]{20}$

Symbol $\sqrt[3]{20}$ znamená číslo, které se po umocnění na třetí rovná dvaceti.
Nazýváme ho třetí odmocnina z 20.
Můžeme ho určit přibližně na libovolný počet míst, například na dvě: $\sqrt[3]{20} \doteq 2,71$.
Správnost můžeme ověřit umocněním:
$2,71^3 \doteq 19,9$.

$2^x = 7 \Rightarrow$ Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 7.
Nemáme takové číslo k dispozici (2 na žádné dosud známé číslo se nerovná 7).
Z grafu vidíme, že takové číslo existuje:



Funkce $y = 2^x$ má hodnotu 7 $\Rightarrow$ musí existovat číslo, na které umocníme 2, a získáme 7. Z grafu je vidět, že bude platit:
$2 < x < 3$.
Číslo 2,8 téměř splňuje naše požadavky:
$2^{2,8} \doteq 6,96 \doteq 7$.
Stejně jako u odmocniny se smíříme s tím, že nebudeme ve většině případů znát přesnou

hodnotu hledaného čísla a budeme ji určovat jen přibližně na libovolný počet míst.
Číslo pojmenujeme **logaritmus při základu 2 ze 7 (** $\log_2 7$ **)** (**základ 2**, protože umocňujeme 2, **ze 7** protože po umocnění má vyjít 7).
Nejpřesnější odpověď na otázku: „Na jaké číslo musíme dát 2, aby vyšla 7?“, je $\log_2 7$.
Platí: $2^x = 7$, právě když $x = \log_2 7$.

Logaritmus při základu *a* z *x* je číslo *y* (píšeme $y = \log_a x$), na které musíme umocnit základ *a*, abychom získali číslo *x* (píšeme $x = a^y$). Tedy $y = \log_a x$, právě když $x = a^y$.

Předchozí definice pro nás teď bude velmi důležitá. Vždy když budeme potřebovat zjistit význam libovolného čísla vystupujícího okolo logaritmů, odkážeme se na ni.

Pedagogická poznámka: Definice samozřejmě není kompletní a korektní. Jejím dokončením se studenti zabývají později, ve chvíli, kdy již určí několik logaritmů a začnou se trochu orientovat ve významu čísel *x*, *y*, *a*. Pokud někdo na nekompletnost upozorní, řešíme ji ihned.

Jaká je hodnota $\log_2 8$?
Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8. Hledané číslo je 3, protože platí:
$2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$.

Poznámka: Všimni si, že stejně jako se při určování hodnot odmocnin odkazujeme na umocňování, při určování hodnot logaritmu se odkazujeme na hodnoty exponenciální funkce.

Př. 1: Urči $\log_3 9$.

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 3, aby vyšlo 9. Hledané číslo je 2, protože platí:
$3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$.

Poznámka: Příklad můžeme řešit také jako rovnici. Hledáme číslo, na které musíme umocnit 3, aby vyšlo 9. Když si ho označíme *x*, musí platit: $3^x = 9$.
$3^x = 3^2$
$x = 2$
$\log_3 9 = 2$

Př. 2: Urči hodnoty logaritmů:

a) $\log_4 16$ b) $\log_{10} 10000$ c) $\log_2 32$ d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ e) $\log_{\sqrt{3}} 9$

a)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 4, aby vyšlo 16. Hledané číslo je 2, protože platí: $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2$.

b)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 10, aby vyšlo 10000. Hledané číslo je 4, protože platí: $10^4 = 10000 \Rightarrow \log_{10} 10000 = 4$.

c)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 32. Hledané číslo je 5, protože platí: $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$.

d)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit $\frac{1}{2}$, aby vyšlo $\frac{1}{8}$. Hledané číslo je 3, protože platí:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$.

e)

Hledáme číslo, na které musíme umocnit $\sqrt{3}$, aby vyšlo 9. Hledané číslo je 4, protože platí:

$\left(\sqrt{3}\right)^4 = \left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

Př. 3: Urči hodnoty logaritmů:

a) $\log_2 \frac{1}{2}$ b) $\log_{10} 0{,}0001$ c) $\log_5 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ e) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8}$

a)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo $\frac{1}{2}$.

Pomůžeme si rovnicí: $2^x = \frac{1}{2}$. $2^x = 2^{-1}$ $x = -1$

$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} = -1$

b)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit 10, aby vyšlo 0,0001.

Pomůžeme si rovnicí: $10^x = 0{,}0001$. $10^x = 10^{-4}$ $x = -4$

$\Rightarrow \log_{10} 0{,}0001 = -4$

c)

Hledáme číslo *x*, na které musím umocnit 5, aby vyšlo 1.

Pomůžeme si rovnicí: $5^x = 1$. $5^x = 5^0$ $x = 0$

$\Rightarrow \log_5 1 = 0$ (logaritmus z 1 se rovná nule bez ohledu na základ)

d)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit $\frac{1}{2}$, aby vyšlo 16.

Pomůžeme si rovnicí: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$. $\left(2^{-1}\right)^x = 2^4$ $2^{-x} = 2^4$ $x = -4$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

e)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit $\sqrt{2}$, aby vyšlo $\frac{1}{8}$.

Pomůžeme si rovnicí: $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{8}$. $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{-3}$ $\frac{x}{2} = -3$ $x = -6$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = -6$

Pedagogická poznámka: Většina studentů dokáže předchozí logaritmy určovat zpaměti, což je samozřejmě lepší. Použití rovnice by mělo být zbraní poslední záchrany, přesto ho doporučuji poměrně brzo po zadání příkladu 3 ukázat na tabuli, aby studenti s horší schopností počítat zpaměti zbytečně neztráceli čas.

Př. 4: Urči hodnoty logaritmů:

a) $\log_3 \sqrt{3}$ b) $\log_4 32$ c) $\log_{27} 3^7$ d) $\log_{\sqrt{8}} 16$

a)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit 3, aby vyšlo $\sqrt{3}$.

Pomůžeme si rovnicí: $3^x = \sqrt{3}$. $3^x = 3^{\frac{1}{2}}$ $x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

b)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit 4, aby vyšlo 32.

Pomůžeme si rovnicí: $4^x = 32$. $\left(2^2\right)^x = 2^5$ $2^{2x} = 2^5$ $x = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \log_4 32 = \frac{5}{2}$

c)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit 27, aby vyšlo 3^7.

Pomůžeme si rovnicí: $27^x = 3^7$. $\left(3^3\right)^x = 3^7$ $3^{3x} = 3^7$ $x = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow \log_{27} 3^7 = \frac{7}{3}$

d)

Hledáme číslo *x*, na které musíme umocnit $\sqrt{8}$, aby vyšlo 16.

Pomůžeme si rovnicí: $\left(\sqrt{8}\right)^x = 16$. $\left(\left[2^3\right]^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^4$ $2^{\frac{3x}{2}} = 2^4$ $3x = 8$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{8}} 16 = \frac{8}{3}$

Logaritmus při základu *a* z *x* je číslo *y* (píšeme $y = \log_a x$), na které musíme umocnit základ *a*, abychom získali číslo *x* (píšeme $x = a^y$). Tedy $y = \log_a x$, právě když $x = a^y$.

Př. 5: Definice logaritmu ze začátku hodiny není úplná a korektní. Doplň ji tak, aby byla správná.

V definici zřejmě chybí předpoklady o hodnotách *a* a *x*.

- *a* (číslo, které umocňujeme) $\Rightarrow$ stejné požadavky jako na základ exponenciální funkce $\Rightarrow$ $a \in (0;\infty) - \{1\}$.
- *x* (výsledek umocňování) $\Rightarrow$ umocňujeme kladná čísla, různá od jedné $\Rightarrow$ výsledek musí být vždy kladný $\Rightarrow$ $x \in (0;\infty)$.
- *y* (mocnitel) $\Rightarrow$ může být libovolný $\Rightarrow$ $y \in R$.

Pro každé kladné reálné číslo *x* a každé kladné reálné číslo *a* různé od jedné definujeme logaritmus při základu *a* z *x* jako číslo *y* (píšeme $y = \log_a x$), na které musíme umocnit základ *a*, abychom získali číslo *x* (píšeme $x = a^y$). Tedy $y = \log_a x$, právě když $x = a^y$. Tedy $y = \log_a x$ právě když $x = a^y$.

Pedagogická poznámka: Myslím, že použitá metoda pozdějšího doplnění předpokladů je výhodnější. Studenti si nejdříve zažijí, jak se logaritmy počítají a teprve poté, když znají význam jednotlivých čísel, sestavují předpoklady. Takto se nad předpoklady zamyslí, alespoň v okamžiku, kdy je formulují. V klasickém případě je většinou zcela ignorují.

Př. 6: Urči zpaměti hodnoty logaritmů:

a) $\log_2 2^{\sqrt{3}}$ b) $\log_{\sqrt{7}} 7^{\pi}$ c) $\log_4 2^{\sqrt{12}}$

a) $\log_2 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (2 musíme umocnit na $\sqrt{3}$, aby vyšlo $2^{\sqrt{3}}$)

b) $\log_{\sqrt{7}} 7^{\pi} = 2\pi$ ($\sqrt{7}$ musíme umocnit na druhou a na π, aby vyšlo 7^{π})

c) $\log_4 2^{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$ (4 musíme umocnit na polovinu a na $\sqrt{12}$, aby vyšlo $2^{\sqrt{12}}$)

Pedagogická poznámka: Minimálně první bod by měli studenti opravdu vyřešit (a chápat) z hlavy. Pokud ne, je potřeba ujasnění situace.

Př. 7: Urči hodnotu výrazu $2^{\log_2 7}$.

Platí: $2^{\log_2 7} = 7$.
$\log_2 7$ je číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 7. A právě na toto číslo jsme dvojku umocnili.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad by měl být opět všem zcela jasný. Překvapivě s ním mají problémy lepší studenti. Při vysvětlování je možné použít zadání, ze kterého je možné provést výpočet přímo:

Urči hodnotu výrazu $2^{\log_2 8}$

$2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$ (platí $\log_2 8 = 3$).

V každém případě je potřeba, aby každý chápal rovnost $2^{\log_2 8} = 8$ přímo bez určování hodnoty logaritmu, které jsme použili v této poznámce.

Př. 8: Urči číslo *x*, pokud platí:

a) $\log_4 x = 2$ b) $\log_4 x = \frac{1}{2}$ c) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ d) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{4}$

a)

Opakujeme význam čísel $\log_4 x = 2 \Rightarrow 4$ je základ mocniny (co umocňujeme), *x* je číslo, které vyjde po umocnění, hodnota logaritmu (2) je číslo na které umocňujeme. Platí tedy: $x = 4^2 = 16$.

b) Platí: $x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$.

c) Platí: $x = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$.

d) Platí: $x = \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[8]{3}$.

Poznámka: Je vidět, že příklady tohoto typu je možné řešit zcela automaticky. Základ logaritmu umocníme na jeho hodnotu a získáme číslo, ze kterého jsme logaritmus počítali.

Př. 9: Urči číslo *a*, pokud platí:

a) $\log_a 16 = 4$ b) $\log_a \frac{1}{8} = -2$ c) $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d) $\log_a 27 = 6$

a) $\log_a 16 = 4$

Opakujeme význam čísel $\log_a 16 = 4 \Rightarrow a$ je základ mocniny (co umocňujeme), 16 je číslo, které vyjde po umocnění, hodnota logaritmu (4) je číslo, na které umocňujeme. Platí tedy: $16 = a^4$. $\Rightarrow$ Ptáme se: „Jaké číslo musíme umocnit na 4, aby vyšlo 16?

$2^4 = a^4 \Rightarrow a = 2$

b) $\log_a \frac{1}{8} = -2$

Jaké číslo musíme umocnit na -2, aby vyšlo $\frac{1}{8}$?

$a^{-2} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Jaké číslo musíme umocnit na $\frac{1}{2}$, aby vyšla $\frac{1}{2}$?

$a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

d) $\log_a 27 = 6$

Jaké číslo musíme umocnit na 6, aby vyšlo 27?

$a^6 = 27 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

Př. 10: Urči hodnotu výrazu:
a) $3^{\log_9 10}$ b) $0{,}5^{\log_2 7}$

Problém: Čísla, na která umocňujeme jsou jiná než číslo v základu logaritmu. Upravíme výraz, zkusíme přepsat základ mocniny:

a) $3^{\log_9 10} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 10} = \left(9^{\log_9 10}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

b) $0{,}5^{\log_2 7} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

Př. 11: Zjednoduš výrazy a uveď podmínky:
a) $2^{\log_2 x^2}$ b) $\log_x x^2$

a) $2^{\log_2 x^2} = x^2$ $\quad x \in R - \{0\}$

b) $\log_x x^2 = 2$ $\quad x \in (0;\infty) - \{1\}$ (základ logaritmu nesmí být 1)

Př. 12: Petáková:
strana 31/cvičení 69 d) e) g)
strana 31/cvičení 70 c) d) g) h)
strana 31/cvičení 71 c) d) g)

Shrnutí: $\log_2 8$ je číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8. Proto platí $\log_2 8 = 3$.