2.9.13 Logaritmická funkce II

Předpoklady: 2912

Logaritmus se základem 10 nazýváme **dekadický logaritmus** a místo $\log_{10} x$ píšeme pouze $\log x$ $\Rightarrow$ pokud v zápisu logaritmu chybí základ, předpokládáme, že základem je číslo 10 (logaritmus bez základu nemá smysl).

Př. 1: Urči hodnoty logaritmů:
a) $\log_{10} 10$ b) $\log_{10} 1000$ c) $\log 1000000$ d) $\log 10^{15}$

a) $\log_{10} 10 = 1$ b) $\log_{10} 1000 = 3$
c) $\log 1000000 = 6$ d) $\log 10^{15} = 15$

Pedagogická poznámka: Základ je vynechán pouze u dvou posledních logaritmů zcela záměrně. Určitě se pokaždé najde někdo, kdo nebude vědět, co má dělat.

Mezi čísly 10 a 1000000 je obrovský rozdíl:
- Číslo 1000000 je 100000krát větší než číslo 10.
- Číslo 1000000 je o 999990 větší než číslo 10.

Logaritmy čísel 1000000 a 10 se liší pouze o 5.

Zatímco exponenciální funkce je nejrychleji rostoucí funkcí, **logaritmus roste ze všech funkcí nejpomaleji** a kvůli této vlastnosti se často používá.

Logaritmus známe z chemie: pH je definována jako absolutního hodnota dekadického logaritmu (logaritmu o základu 10) koncentrace iontu H_3O^+ v roztoku. Proč?

Př. 2: Doplň tabulku:

koncentrace H_3O^+ **v exponenciálním tvaru**	10^{-1}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-14}
koncentrace H_3O^+ **desetinným číslem**				
pH				

$c = 10^{-1}$: $\left|\log_{10} 10^{-1}\right| = \left|-1\right| = 1$ $c = 10^{-5}$: $\left|\log_{10} 10^{-5}\right| = \left|-5\right| = 5$

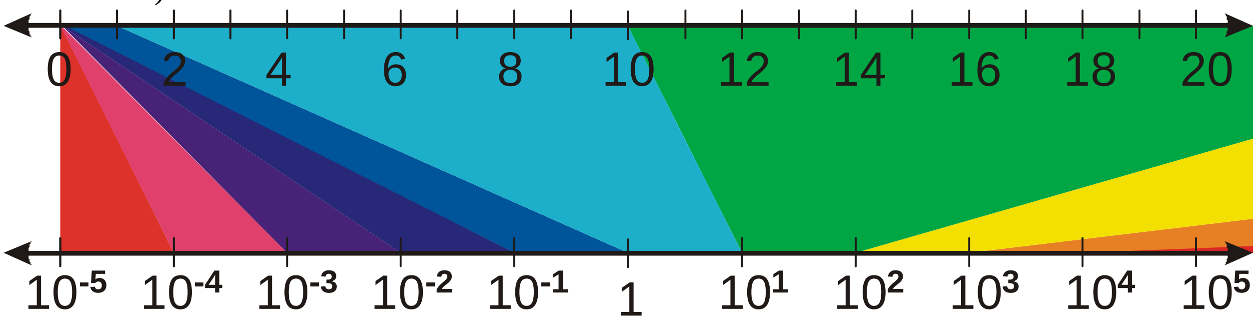
$c = 10^{-7}$: $\left|\log_{10} 10^{-7}\right| = \left|-7\right| = 7$ $c = 10^{-14}$: $\left|\log_{10} 10^{-14}\right| = \left|-14\right| = 14$

koncentrace H_3O^+ **v exponenciálním tvaru**	10^{-1}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-14}
koncentrace H_3O^+ **desetinným číslem**	0,1	0,00001	0,0000001	0,00000000000001

pH	1	5	7	14

Logaritmus používaný při výpočtu pH elegantně zobrazil obrovský rozsah koncentrací na čísla od 1 do 14 (kdybychom psali místo pH koncentrace ve tvaru desetinných čísel, unulovali bychom se k smrti).
Podobným způsobem jako u pH se logaritmů používá k zachycení intenzit zvuku. Obrovský rozsah slyšitelných zvuků ($10^{-12}\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ až $10^{0}\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$) se zachycuje pomocí logaritmické stupnice decibelů. Pokud se hladina zvuku zvýší ze 90 na 110 decibelů, energie, kterou zvuk přenáší, vzrostla 100krát.

Logaritmická stupnice na ose grafu se používá, když chceme zobrazit obrovský rozsah hodnot. Příklad je na obrázku. Horní stupnice je klasická, dolní logaritmická. Na dolní stupnici je zajímavé, že vzdálenost mezi čísly $10^0=1$ a $10^1=10$ (na normální stupnici je vzdálenost 9) je stejná jako vzdálenost mezi čísly $10^1=10$ a $10^2=100$ (na normální stupnici je vzdálenost 90). Vzdálenosti čísel na spodní ose totiž odpovídají rozdílu jejich logaritmů. Proto jsou všechny sousední mocniny deseti vzdálené o jedna (hodnoty jejich logaritmů se liší i jedna.).
Pomocí barev je vyznačeno, jak se jednotlivé části normální osy zobrazují na osu logaritmickou. Čím více vpravo se podíváme, tím více logaritmická osa vzdálenosti zkracuje, naopak na levém konci obrázku čím dál více vzdálenosti zvětšuje. Oranžová část normální osy začíná až 10 m napravo od obrazovky a končí ve vzdálenosti 100 m (při 100% zobrazení na monitoru).



Př. 3: Pomocí vlastností logaritmických funkcí porovnej čísla $\log_4 7$ $\log_4 13$.

Obě srovnávaná čísla jsou logaritmy při základu 4. Funkce $y=\log_4 x$ je rostoucí. Platí tedy: $\log_4 7<\log_4 13$, protože $7<13$.

Př. 4: Pomocí vlastností logaritmických funkcí porovnej čísla $\log_\pi \sqrt{8}$ $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt{8}$.

$\log_\pi \sqrt{8}$, základ logaritmu je větší než 1, $\log_\pi x$ je rostoucí funkce, $\sqrt{8}>1$, musí platit $\log_\pi \sqrt{8}>\log_\pi 1=0$.
$\log_{\frac{1}{16}} \sqrt{8}$, základ logaritmu je menší než 1, $\log_{\frac{1}{16}} x$ je klesající funkce, $\sqrt{8}>1$, musí platit $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt{8}<\log_{\frac{1}{16}} 1=0$.

Dáme obě nerovnosti dohromady: $\log_{\pi}\sqrt{8} > 0 > \log_{\frac{1}{16}}\sqrt{8}$.

Pedagogická poznámka: Je samozřejmě možné, aby studenti na řešení příkladů použili grafy.

Př. 5: Nakresli graf funkce $y = \log_2(x+2) - 1$.

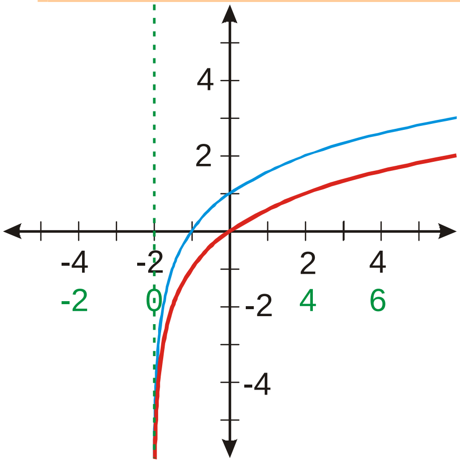
Platí: $y = \log_2(x+2) - 1 = f(x+2) - 1$.

Zvolíme x.

Vypočteme $x+2$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) = \log_2(x+2)$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) - 1 = \log_2(x+2) - 1$.



Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku už mají studenti za sebou takové množství nakreslených grafů, že jejich pozornost značně polevuje a tak se objevuje překvapivé množství chyb. Například předchozí graf posouvají na špatnou stranu, u následujícího si nevšimnou, že absolutní hodnota se uplatňuje na hodnoty proměnné x a ne na nakreslený graf funkce atd. Ve všech takových případech je nutím, aby se vrátili k základním pravidlům a zkusili udělat obrázek znovu a opatrně.

Př. 6: Nakresli graf funkce $y = \log_2(|x| - 1)$.

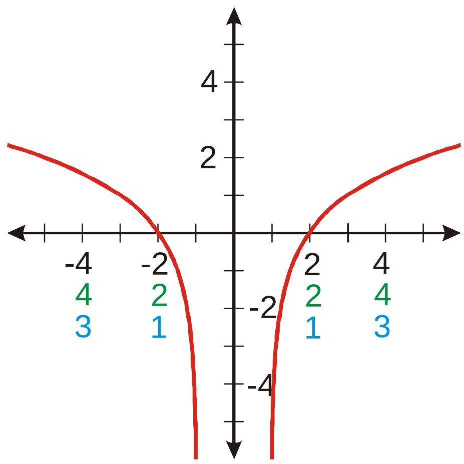
Platí: $y = \log_2(|x| - 1) = f(|x| - 1)$.

Zvolíme: x.

Vypočteme: $|x|$.

Vypočteme: $|x| - 1$.

Nakreslíme funkci $y = f(|x| - 1) = \log_2(|x| - 1)$.



Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \log_2 \left(4 - |x|\right)$.

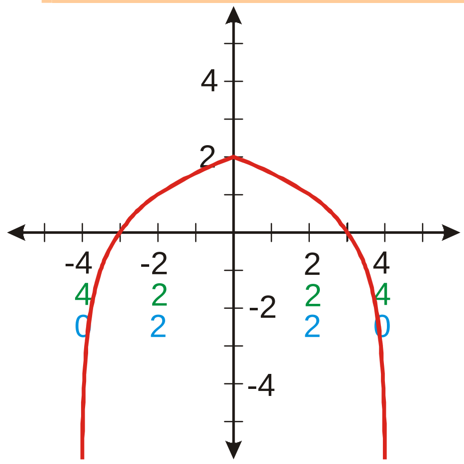
Platí: $y = \log_2 \left(4 - |x|\right) = f\left(4 - |x|\right)$.

Zvolíme x.

Vypočteme $|x|$.

Vypočteme: $4 - |x|$.

Nakreslíme funkci $y = f\left(4 - |x|\right) = \log_2 \left(4 - |x|\right)$.



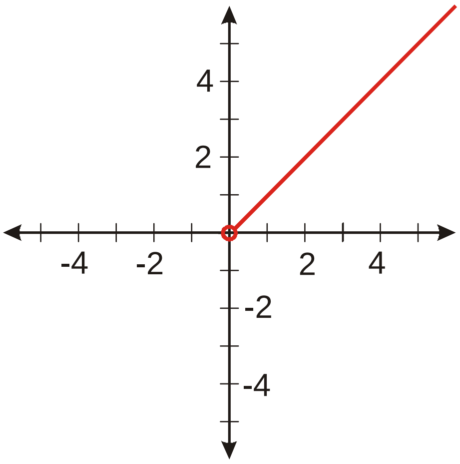
Pedagogická poznámka: Hodinu je potřeba zorganizovat tak, aby alespoň jeden z následujících příkladů studenti stihli.

Př. 8: Nakresli graf funkce $y = 2^{\log_2 x}$.

Problém: Zdá se, že máme kreslit graf exponenciální funkce, jenže přečíslování osy *x* je nad naše síly $\Rightarrow$ zkusíme úpravu výrazu.

$y = 2^{\log_2 x} = x$ (z definice logaritmu – umocňujeme dvojku číslo, na které musíme umocnit dvojku, aby vyšlo *x*).

Ještě musíme určit definiční obor: z *x* počítáme logaritmus $\Rightarrow$ $x \in \left(0;\infty\right)$.



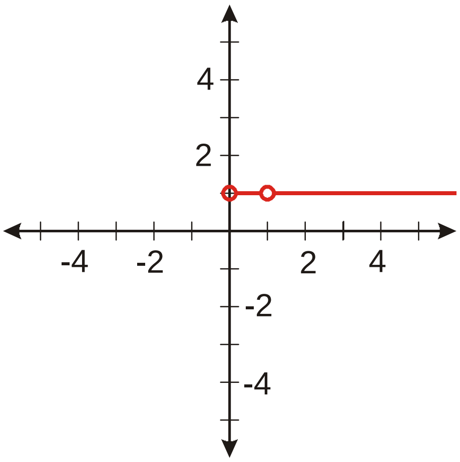
Pedagogická poznámka: S rovností $y = 2^{\log_2 x} = x$ bývá často problém. Můžete zkusit i další metody: $y = \log_2 x$, právě když $2^y = x$. Dosadíme do rovnice za *y* $2^y = 2^{\log_2 x} = x$.
Další možností jsou množinové obrázky, na kterých využijete inverzi obou funkcí.

Př. 9: Nakresli graf funkce $y = \log_x x$.

Problém: Zdá se, že máme kreslit graf logaritmické funkce, jenže se mění její základ $\Rightarrow$ zkusíme úpravu výrazu.
$y = \log_x x = 1$ (z definice logaritmu – hledáme číslo, na které musíme umocnit *x*, aby vyšlo *x*)
Ještě musíme určit definiční obor:

- z *x* počítáme logaritmus $\Rightarrow$ $x \in (0;\infty)$,
- *x* je základ logaritmu $\Rightarrow$ $x \in (0;\infty) - \{1\}$.

$D(f) = (0;\infty) - \{1\}$



Pedagogická poznámka: Oba předchozí příklady jsou důležité jako demonstrace užitečnosti návratu k základnímu významu v okamžiku, kdy nevíme, jak dál. Zcela samostatné vyřešení prvního příkladu je raritou, s druhým je to podstatně lepší (bariéra jiného úhlu pohledu je překonána).
Dalším význam příkladů je v dodržování definičních oborů. Většina studentů má samozřejmě tendenci kreslit grafy jako přímky.

Př. 10: Petáková:

strana 32/cvičení 83 g_3, g_4, g_5

strana 32/cvičení 84 h_2

Shrnutí: Logaritmus se používá k zobrazování velkého rozsahu veličin.