2.9.14 Věty o logaritmech I

Předpoklady: 2910

Pedagogická poznámka: Tato a následující hodina se dají stihnout najednou, pokud oželíte počítání v tabulce a některé příklady na konci příští hodiny. Přijde mi to trochu škoda, snažím se studentům ukázat, že logaritmy byly dříve opravdu užitečné.

Pedagogická poznámka: Tabulku samozřejmě kreslím na tabuli a všechny odvozování provádím na ní bez použití projektoru.

Objev logaritmů
Konec 16. století: rozvoj mořeplavby, obchodu a konstruování $\Rightarrow$ velká potřeba rychlého počítání $\Rightarrow$ rozvoj metod na usnadnění výpočtů.
Problémy s násobením (sčítání je ještě snesitelné, ale násobení čtyřmístných čísel je docela problém), dělením, umocňování a odmocňováním.
Počátek 17. století: objev logaritmů.

Př. 1: Doplň tabulku:

x	0	1	2	3	4	5	6	10
$y=2^x$								

x	0	1	2	3	4	5	6	10
$y=2^x$	1	2	4	8	16	32	64	1024

Chceme (bez kalkulačky) spočítat kolik je $4 \cdot 16$.
Správný výsledek $4 \cdot 16 = 64$.
Můžeme ho získat i jinak (když si uvědomíme, že násobíme mocniny 2):
$4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$.
Postřeh: Výsledek násobení čísel v druhém řádku tabulky, jsme získali sčítáním čísel v jejím prvním řádku.

x	0	1	2	3	4	5	6	10
$y=2^x$	1	2	4	8	16	32	64	1024

Význam čísel v tabulce můžeme vyjádřit i jinak (obráceně):

$y=\log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	10
x	1	2	4	8	16	32	64	1024

Zkusíme jinou dvojici čísel z druhé řádky: $64 \cdot 16 = 1024$.
Sečteme logaritmy těchto dvou čísel (čísla z první řádky) $6+4=10$.

$y=\log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	10
x	1	2	4	8	16	32	64	1024

Zřejmě platí: Násobením dvou čísel ve druhém řádku získáme číslo, které je pod součtem odpovídajících čísel v prvním řádku.

$16 \cdot 64 = 1024$

$4 + 6 = 10$

$\log_2 16 + \log_2 64 = \log_2 1024 = \log_2 (16 \cdot 64)$

S tabulkou a předchozím postřehem:

- Můžeme převádět násobení na sčítání (k číslům z druhého řádku, která chceme vynásobit, najdeme čísla v prvním řádku, která sečteme, a pod jejich součtem objevíme výsledek násobení).
- Logaritmus při základu 2 dokážeme spočítat pro všechna kladná čísla (a tím tabulku „zahustit“, abychom nebyli odkázáni pouze na mocniny dvou).

$\Rightarrow$ Mohli bychom si tím ulehčit násobení (v dnešní době kalkulaček to nemá cenu, ale v době bez kalkulaček to byla ohromná věc. Pomůcce, která tuto vlastnost logaritmů využívala, se říká **logaritmické pravítko** a patřila k nutné výbavě každého inženýra jako dnes kalkulačka nebo počítač).

Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$ a pro všechna kladná čísla r, s platí:

$$\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s .$$

Důkaz:

$r = a^{\log_a r}$, $s = a^{\log_a s}$, $r \cdot s = a^{\log_a (r \cdot s)}$

Spočteme součin $r \cdot s$ jinak: $r \cdot s = a^{\log_a r} \cdot a^{\log_a s} = a^{\log_a s + \log_a r}$ (sčítání exponentů při násobení mocnin).

Spojíme oba způsoby: $r \cdot s = a^{\log_a (r \cdot s)} = a^{\log_a s + \log_a r}$.

Exponenty se musí rovnat: $\log_a (r \cdot s) = \log_a s + \log_a r$.

Př. 2: Zapiš jediným logaritmem a zjednoduš:

a) $\log_4 8 + \log_4 2$ b) $\log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log_{0,1} 25 + \log_{0,1} 4$

a) $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 16 = 2$ b) $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$

c) $\log_{0,1} 25 + \log_{0,1} 4 = \log_{0,1} 100 = -2$

Př. 3: Zapiš jako součet dvou logaritmů:

a) $\log_2 6$ b) $\log_3 18$ c) $\log 7$

a) $\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$ b) $\log_3 18 = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$

c) $\log 7 = \log 7 + \log 1$

Poslední příklad je podezřelý: $\log 7 = \log 7 + \log 1$. Může rovnost platit?

Může, protože platí $\log 1 = 0$ (vše souvisí se vším, ani by nás nenapadlo, že nulová hodnota $\log 1$ je nutná pro platnost vzorce na součet logaritmů).

Pedagogická poznámka: Řešení posledního příkladu je nutné studentům nabídnout. Ve skutečnosti je nesmyslné a je pouze krokem k poznámce, která po příkladu následuje.

Větu o součinu můžeme rozšířit i pro více čísel:

Př. 4: Doplň následující větu, tak aby byla rozšířením předchozího vzorce:
Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$ a pro všechna kladná čísla $r_1, r_2, \ldots r_n$ platí: $\log_a (r_1 \cdot r_2 \cdots r_n) = \ldots$

Uvnitř logaritmu je součin více čísel $\Rightarrow$ pravidlo ho přemění na součet více logaritmů.

Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$ a pro všechna kladná čísla $r_1, r_2, \ldots r_n$ platí:
$\log_a (r_1 \cdot r_2 \cdots r_n) = \log_a r_1 + \log_a r_2 + \ldots + \log_a r_n$.

Př. 5: Zjednoduš výraz $\log_3 30 - \log_3 5 - \log_3 2$.

$$\log_3 30 - \log_3 5 - \log_3 2 = \log_3 3 + \log_3 5 + \log_3 2 - \log_3 5 - \log_3 2 = \log_3 3 = 1$$

Logaritmy můžeme použít i pro převedení dělení:

$y = \log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	10
x	1	2	4	8	16	32	64	1024

$$\frac{1024}{64} = 16$$

$$10 - 6 = 4$$

$$\log_2 1024 - \log_2 64 = \log_2 16 = \log_2 \frac{1024}{64}$$

Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$ a pro všechna kladná čísla r, s platí:

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s.$$

Důkaz vynecháme.

Př. 6: Pomocí vzorce $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$ zjednoduš:

a) $\log_2 12 - \log_2 3$ b) $\log_3 2 - \log_3 6$

a) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$

b) $\log_3 2 - \log_3 6 = \log_3 \frac{2}{6} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$

Př. 7: Zjednoduš bez použití vzorce $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$ výrazy:

a) $\log_2 12 - \log_2 3$ b) $\log_3 2 - \log_3 6$.

a) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 4 \cdot 3 - \log_2 3 = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 3 = \log_2 4 = 2$

b) $\log_3 2 - \log_3 6 = \log_3 2 - (\log_3 3 + \log_3 2) = -\log_3 3 = -1$

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci používat oba vztahy jediným způsobem, navíc ve chvíli, kdy se ve výrazu objeví mínus automaticky nasazují vzorec pro podíl. Cílem příkladu je, aby se pokusili podívat na příklad i z jiného úhlu a vyřešit ho i méně přímočarým způsobem.

Př. 8: Převeď výrazy na logaritmus jediného čísla:

a) $\log_2 30 - \log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 9$ b) $\log_{0,2} 8 - \log_{0,2} 100 + \log_{0,2} 0,5$

a) $\log_2 30 - \log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 9 = \log_2 \frac{30 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \log_2 \frac{2 \cdot 15 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 5} = \log_2 2 = 1$

b) $\log_{0,2} 8 - \log_{0,2} 100 + \log_{0,2} 0,5 = \log_{0,2} \frac{8 \cdot 0,5}{100} = \log_{0,2} 0,04 = 2$

Př. 9: Zjednoduš výrazy:

a) $\log_5 90 - 2\log_5 3 - \log_5 2$ b) $3\log_3 2 - \log_3 24$.

a)

$\log_5 90 - 2\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 9 + \log_5 10 - 2\log_5 3 - \log_5 2 =$

$\log_5 3 + \log_5 3 + \log_5 5 + \log_5 2 - 2\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 5 = 1$

b)

$3\log_3 2 - \log_3 24 = 3\log_3 2 - (\log_3 4 + \log_3 6) =$

$= 3\log_3 2 - (\log_3 2 + \log_3 2 + \log_3 2 + \log_3 3) = -\log_3 3 = -1$

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci se zbavovat výrazu $2\log_5 3$ tímto způsobem: $2\log_5 3 = \log_5 2 \cdot 3 = \log_5 6$. Nejdříve studenty nechávám chybu hledat, poté si problém ukážeme u tabule. Jako doplňkový úkol poté zadávám upravení výrazu $2\log_5 3$ na logaritmus z jednoho čísla.

Logaritmy zjednoduší násobení na sčítání, nemohly by zjednodušit umocňování?

Př. 10: Najdi vztah pro odstranění mocniny z výrazu uvnitř logaritmu: $\log_a (r^s) =$.

$\log_2 2^3 = \log_2 2 \cdot 2 \cdot 2 = \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 = 3\log_2 2$

$\log_2 2^3 = 3\log_2 2$ $\Rightarrow$ exponent čísla uvnitř logaritmu „spadnul" před logaritmus $\Rightarrow$ zřejmě platí: $\log_a (r^s) = s\log_a r$.

Ověříme: $\log_a (r^s) = \log_a \left(\overbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}^{s\,krát} \right) = \overbrace{\log_a r + \log_a r + \ldots + \log_a r}^{s\,krát} = s\log_a r$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad většinou necháváme otevřený do následující hodiny.

Př. 11: Petáková:

strana 31/cvičení 72 b) c)

strana 31/cvičení 73 c) e)

Shrnutí: Logaritmy převádějí násobení na sčítání.