

2.9.18 Řešení exponenciálních rovnic logaritmováním

Předpoklady: 2917

Pedagogická poznámka: Původně jsem celou problematiku řešil spočtením jednoho příkladu, ale v písemkách patřila rovnice tohoto typu vždy k největším úskalím. Časem jsem si uvědomil, že logaritmování exponenciálních rovnic má před řešením logaritmických rovnic velký význam. Studenti se v něm učí:

- logaritmovat rovnice,
- vnímat logaritmus jako jediné číslo (a tím se vyhýbat krácení logaritmů, vytýkání základů a podobných chyb),
- dodržovat postup na řešení lineárních rovnic ve zdánlivě zcela nové situaci,
- používat věty o logaritmech (při úpravách na konci řešení).

Pedagogická poznámka: Pokud žáci počítají sami, dojdou k různým tvarům konečných výsledků. Nejjednodušším typem kontroly je napsat na tabuli přibližné desetinné hodnoty výsledků, podle kterých si mohou pomocí kalkulačky zkontrolovat svůj výsledek.

Př. 1: Vyřeš rovnici $3^{x+1} = 2^{3-2x}$.

$$3^{x+1} = 2^{3-2x}$$

$$\log 3^{x+1} = \log 2^{3-2x}$$

$(x+1)\log 3 = (3-2x)\log 2$ - teď jen lineární rovnice, roznásobíme závorky.

$$x\log 3 + \log 3 = 3\log 2 - 2x\log 2$$

$$x\log 3 + 2x\log 2 = 3\log 2 - \log 3$$

$$x(\log 3 + 2\log 2) = 3\log 2 - \log 3$$

$$x = \frac{3\log 2 - \log 3}{\log 3 + 2\log 2}$$

$$K = \left\{ \frac{3\log 2 - \log 3}{\log 3 + 2\log 2} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Tento příklad je jedním z míst, kde si můžete ověřit, jak silná je tendence studentů dělat věci „selským rozumem“. I když napíšete rovnici ve tvaru $(x+1)\log 3 = (3-2x)\log 2$ na tabuli, řeknete, že jde o lineární rovnici, a zopakujete, jakým způsobem se lineární rovnice řeší, naprostá většina studentů upraví rovnici do tvaru $\frac{x+1}{3-2x} = \frac{\log 2}{\log 3}$ a neví, co s ní dál. Podvědomá tendence separovat neznámé pryč z vítězí nad logikou.

Př. 2: Uprav výsledek předchozího příkladu tak, aby v čitateli i jmenovateli zlomku byl jediný logaritmus z jednoho čísla. Pak vypočti pomocí kalkulačky přibližnou hodnotu řešení předchozí rovnice a dosazením ověř správnost výsledku.

$$x = \frac{3 \log 2 - \log 3}{\log 3 + 2 \log 2} = \frac{\log 2^3 - \log 3}{\log 3 + \log 2^2} = \frac{\log \left(\frac{2^3}{3} \right)}{\log (3 \cdot 2^2)} = \frac{\log \frac{8}{3}}{\log 12} \doteq 0,3947$$

Dosadíme: $3^{0,3947+1} = 2^{3-2 \cdot 0,3947}$.

$$3^{1,3947} = 2^{2,2106}$$

$$4,6285 = 4,6286$$

Obě strany jsou přibližně stejné. Hodnota logaritmu byla zaokrouhlená, malá chyba ve výsledku se dala očekávat.

Př. 3: Vyřeš rovnici $(\sqrt{5})^{2x+1} = (7^2)^{1-x}$. Logaritmuj se základem e . Výsledek uprav do tvaru podílu dvou logaritmů. Uveď přibližný výsledek s přesností na 6 desetinných míst.

Malá vada na kráse: Rovnice obsahuje závorky s mocninami. Mocniny upravíme než budeme logaritmovat.

$$\left(5^{\frac{1}{2}} \right)^{2x+1} = 7^{2(1-x)}$$

$$5^{x+\frac{1}{2}} = 7^{2-2x} \quad - \text{logaritmujeme.}$$

$$\ln \left(5^{x+\frac{1}{2}} \right) = \ln (7^{2-2x}) \quad - \text{exponenty stáhneme dolů.}$$

$$\left(x + \frac{1}{2} \right) \ln 5 = (2 - 2x) \ln 7 \quad - \text{lineární rovnice, řešíme klasicky.}$$

$$x \ln 5 + 0,5 \ln 5 = 2 \ln 7 - 2x \ln 7$$

$$x \ln 5 + 2x \ln 7 = 2 \ln 7 - 0,5 \ln 5$$

$$x(\ln 5 + 2 \ln 7) = 2 \ln 7 - 0,5 \ln 5$$

$$x = \frac{2 \ln 7 - 0,5 \ln 5}{\ln 5 + 2 \ln 7} = \frac{\ln 49 - \ln \sqrt{5}}{\ln 5 + \ln 49} = \frac{\ln \frac{49}{\sqrt{5}}}{\ln 245} \doteq 0,561163$$

$$K = \left\{ \frac{2 \ln 7 - 0,5 \ln 5}{\ln 5 + 2 \ln 7} \right\}$$

Konečný tvar rovnice je možné zjednodušit, když budeme logaritmovat o vhodném základu.

Př. 4: Vyřeš rovnici: $4 \cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{9}$. Logaritmuj o různých základech. Spočti a porovnej přibližné výsledky z různých způsobů řešení.

Menší problém: Strany obsahují součiny \Rightarrow převedeme na jednu mocninu:

$$2^2 \cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{3^2}.$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

Jaké základy má smysl použít:

- 10 a e – snadný výpočet na kalkulačce
- 2 a 3 – na jedné straně rovnice zmizí logaritmus

Zkusíme všechny možnosti:

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\log(2^{2x+1}) = \log(3^{x+1})$$

$$(2x+1)\log 2 = (x+1)\log 3$$

$$2x\log 2 + \log 2 = x\log 3 + \log 3$$

$$2x\log 2 - x\log 3 = \log 3 - \log 2$$

$$x(2\log 2 - \log 3) = \log 3 - \log 2$$

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{2\log 2 - \log 3} = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log \frac{4}{3}} \doteq 1,409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\log_2(2^{2x+1}) = \log_2(3^{x+1})$$

$$(2x+1)\log_2 2 = (x+1)\log_2 3$$

$$(2x+1) \cdot 1 = x\log_2 3 + 1\log_2 3$$

$$2x - x\log_2 3 = \log_2 3 - 1$$

$$x(2 - \log_2 3) = \log_2 3 - 1$$

$$x = \frac{\log_2 3 - 1}{2 - \log_2 3} \doteq 1,409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\ln(2^{2x+1}) = \ln(3^{x+1})$$

$$(2x+1)\ln 2 = (x+1)\ln 3$$

$$2x\ln 2 + \ln 2 = x\ln 3 + \ln 3$$

$$2x\ln 2 - x\ln 3 = \ln 3 - \ln 2$$

$$x(2\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 - \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{4}{3}} \doteq 1,409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$

$$\log_3(2^{2x+1}) = \log_3(3^{x+1})$$

$$(2x+1)\log_3 2 = (x+1)\log_3 3$$

$$2x\log_3 2 + \log_3 2 = (x+1) \cdot 1$$

$$2x\log_3 2 - x = 1 - \log_3 2$$

$$x(2\log_3 2 - 1) = 1 - \log_3 2$$

$$x = \frac{1 - \log_3 2}{2\log_3 2 - 1} \doteq 1,409421$$

Všechny cesty vedou ke stejnému výsledku.

$$K = \left\{ \frac{\log 3 - \log 2}{2\log 2 - \log 3} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Při hodině u předchozího příkladu rozdělím třídu na skupiny a každá počítá jiným způsobem.

Př. 5: Vyřeš rovnici $2 \cdot 3^{2x} = 5^{x-1}$.

Vada na kráse: na levé straně překáží dvojka, ale stejně s ní nic neuděláme \Rightarrow logaritmuje takto: $\log(2 \cdot 3^{2x}) = \log(5^{x-1})$.

$$\log 2 + \log(3^{2x}) = \log(5^{x-1})$$

$$\log 2 + 2x\log 3 = (x-1)\log 5$$

$$\log 2 + 2x\log 3 = x\log 5 - \log 5$$

$$2x\log 3 - x\log 5 = -\log 5 - \log 2$$

$$x(2\log 3 - \log 5) = -\log 5 - \log 2$$

$$x = \frac{-\log 5 - \log 2}{2 \log 3 - \log 5} = \frac{\log \frac{1}{10}}{\log \frac{9}{5}} = -\frac{1}{\log \frac{9}{5}} \doteq -3,91738 \quad K = \left\{ \frac{-\log 5 - \log 2}{2 \log 3 - \log 5} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Stejně jako při řešení slovních úloh je potřeba dávat pozor, aby studenti správně upravovali levou stranu rovnice.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{x+2} \cdot 3^{x-1} = 5^{2x}$.

$$2^{x+2} \cdot 3^{x-1} = 5^{2x} \quad - \text{logaritmujeme.}$$

$\log(2^{x+2} \cdot 3^{x-1}) = \log(5^{2x})$ - každá strana je jedno číslo, které musíme logaritmovat dohromady.

$$\log(2^{x+2}) + \log(3^{x-1}) = \log(5^{2x})$$

$$(x+2)\log 2 + (x-1)\log 3 = 2x \log 5$$

$$x \log 2 + 2 \log 2 + x \log 3 - \log 3 = 2x \log 5$$

$$x \log 2 + x \log 3 - 2x \log 5 = \log 3 - 2 \log 2$$

$$x(\log 2 + \log 3 - 2 \log 5) = \log 3 - 2 \log 2$$

$$x = \frac{\log 3 - 2 \log 2}{\log 2 + \log 3 - 2 \log 5} \doteq 0,20158$$

$$K = \left\{ \frac{\log 3 - 2 \log 2}{\log 2 + \log 3 - 2 \log 5} \right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2^{x^2} \cdot 3^{2x} = 5^x$.

$$2^{x^2} \cdot 3^{2x} = 5^x \quad - \text{logaritmujeme.}$$

$\log(2^{x^2} \cdot 3^{2x}) = \log(5^x)$ - každá strana je jedno číslo, které musíme logaritmovat dohromady.

$$\log(2^{x^2}) + \log(3^{2x}) = \log(5^x)$$

$$x^2 \log 2 + 2x \log 3 = x \log 5$$

$x^2 \log 2 + 2x \log 3 - x \log 5 = 0 \quad \Rightarrow$ kvadratická rovnice bez absolutního členu \Rightarrow vytkneme x .

$$x(x \log 2 + 2 \log 3 - \log 5) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x \log 2 + 2 \log 3 - \log 5 = 0 \Rightarrow x \log 2 = \log 5 - 2 \log 3$$

$$x_2 = \frac{\log 5 - 2 \log 3}{\log 2} \doteq -0,847997$$

$$K = \left\{ 0; \frac{\log 5 - 2 \log 3}{\log 2} \right\}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu jde samozřejmě o to, jestli si studenti všimnou, že získali docela obyčejnou kvadratickou rovnici.

Shrnutí: Logaritmováním dostaneme neznámou z exponentu.