

2.9.19 Logaritmické rovnice I

Předpoklady: 2915

Pedagogická poznámka: Stejně jako u exponenciálních rovnic a rozkladů na součin bereme logaritmické rovnice jako nácvik „výběru metody“. Sestavujeme si arzenál metod a na konci máme hodinu, ve které jsou pomíchané různé druhy rovnic a studenti musejí sami vybírat nejvhodnější metodu řešení.

Logaritmické rovnice - rovnice s neznámou v logaritmu.

Co máme k dispozici?

- definice logaritmu: $y = \log_a x$ právě když $x = a^y$,
- vzorce pro logaritmy: $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$, $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$,

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r, \quad \log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}.$$

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 x = 3$.

Podmínka: $x > 0$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

Připomíná to nejjednodušší exponenciální rovnice typu $2^x = 8$.

Jde řešit z paměti: Ptáme se jaké číslo vznikne, když umocníme 2 (základ logaritmu) na třetí (hodnota logaritmu = hodnota exponentu).

Jde o číslo $2^3 = 8$. $K = \{8\}$

Jak postup zobecnit (ne všechno půjde z paměti)?

Jako u exponenciálních rovnic, napíšeme pravou stranu jako logaritmus:

$$\log_2 x = 3$$

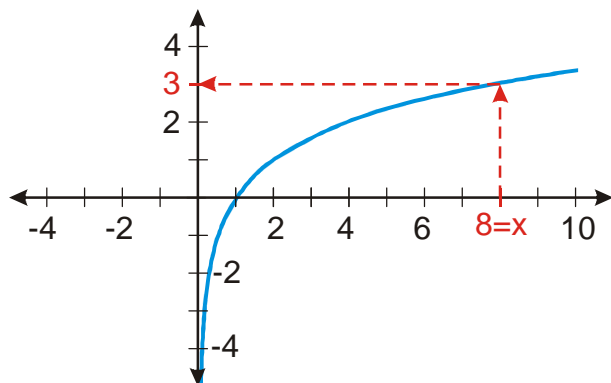
$$\log_2 x = \log_2 2^3$$

$$\log_2 x = \log_2 8$$

Rozebereme vzniklou rovnici:

- levá strana: $L = \log_2 x$ - hodnota funkce $y = \log_2 x$ pro neznámé číslo x
- pravá strana: $P = \log_2 8$ - hodnota funkce $y = \log_2 x$ pro číslo 8

Obě strany se mají rovnat \Rightarrow funkce $y = \log_2 x$ má pro x i pro 8 stejnou hodnotu.



Z grafu je vidět, že funkce $y = \log_2 x$ je prostá (ke každému y má pouze jedno x) \Rightarrow pokud má funkce $y = \log_2 x$ pro x i pro 8 stejnou hodnotu (konkrétně $y = 3$) musí se x a 8 rovnat (existuje pouze jedna hodnota x , ze které se dostaneme přes logaritmus k 3) $\Rightarrow x = 8$.

I všechny ostatní logaritmické funkce $y = \log_a x$ jsou prosté \Rightarrow postup můžeme použít obecně.

Pokud se podaří logaritmickou rovnicí upravit do tvaru $\log_a(\text{výraz1}) = \log_a(\text{výraz2})$, můžeme přejít k rovnici $\text{výraz1} = \text{výraz2}$. Protože funkce $y = \log_a x$ je prostá, je tato úprava ekvivalentní. Této úpravě se říká odlogaritmování.

Při řešení rovnic budeme často potřebovat zapsat nějaké číslo jako logaritmus při určitém základu. Jak zapsat 3 jako logaritmus při základu 2?

Možné cesty:

- $3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^3$,
- $\log_2 x = 3$ právě když $x = 2^3$ (umocňujeme základ a hodnota logaritmu je exponent).

Př. 2: Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:

- a) $3 \{\log_{10}\}$ b) $2 \{\log_5\}$ c) $-1 \{\log_{0,5}\}$ d) $0,5 \{\log_4\}$
 e) $0 \{\log_\pi\}$ f) $\sqrt{2} \{\log_3\}$

a) $3 = \log_{10} 10^3 = \log_{10} 1000$

b) $2 = 2 \log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$

c) $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$

d) $0,5 = \log_4 4^{0,5} = \log_4 2$

e) $0 = \log_\pi \pi^0 = \log_\pi 1$

f) $\sqrt{2} = \sqrt{2} \log_3 3 = \log_3 3^{\sqrt{2}}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad tak sice vypadá jako ztráta času, ale rozhodně není. Studenti mají s převáděním čísel na logaritmy značné problémy (i když jde o trivialitu) a předchozí příklad jim ušetří při řešení rovnic hodně času.

Př. 3: Vyřeš rovnice:

- a) $\log_2(x-2) = 4$ b) $\log_3(2x+1) = 2$ c) $\log_{0,5}(2-x) = -2$
 d) $3 \log_2(3x+1) = 6$ e) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$
 f) $\log_{0,5} \log_4 x = -4$ (jinak zapsáno $\log_{0,5}(\log_4 x) = -4$)

a) $\log_2(x-2) = 4$

b) $\log_3(2x+1) = 2$

Podmínka: $x > 2$ (nemůžeme dosadit cokoliv).

Podmínka: $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$\log_2(x-2) = 4$

$\log_3(2x+1) = 2$

$\log_2(x-2) = \log_2 2^4$

$\log_3(2x+1) = \log_3 3^2$

$\log_2(x-2) = \log_2 16$ - rovnost logaritmů \Rightarrow

$\log_3(2x+1) = \log_3 9$ - rovnost logaritmů \Rightarrow

můžeme odlogaritmovat:

$$x - 2 = 16$$

$$x = 18 \quad K = \{18\}$$

$$c) \log_{0,5}(2-x) = -2$$

$$\text{Podmínka: } 2-x > 0 \Rightarrow 2 > x$$

$$\log_{0,5}(2-x) = -2$$

$$\log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5} 0,5^{-2}$$

$$\log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5} 4 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$2-x = 4$$

$$-2 = x \quad K = \{-2\}$$

$$e) \log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$$

$$\text{Podmínka: } x > -1.$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}} 3 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$1+x = 3$$

$$x = 2 \quad K = \{2\}$$

můžeme odlogaritmovat:

$$2x+1=9$$

$$2x=8$$

$$x=4 \quad K = \{4\}$$

$$d) 3\log_2(3x+1) = 6$$

$$\text{Podmínka: } 3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

Problém: levá strana není logaritmus \Rightarrow rovnici vydělíme

$$\log_2(3x+1) = 2$$

$$\log_2(3x+1) = \log_2 2^2 \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$3x+1 = 4$$

$$3x = 3$$

$$x = 1 \quad K = \{1\}$$

$$f) \log_{0,5} \log_4 x = -4$$

$$\text{Podmínka: } x > 0.$$

$$\log_{0,5} \log_4 x = \log_{0,5} 0,5^{-4} \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$\log_4 x = 0,5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$$

$$\log_4 x = \log_4 4^{16} \quad - \text{odlogaritmuje}$$

$$x = 4^{16} \quad K = \{4^{16}\}$$

Pedagogická poznámka: Studenti obcházejí trojku v bodě d) většinou nesmyslně převedením na třetí mocninu uvnitř. Připomínám jim, že nejdřív by měli zkusit ty nejjednodušší cesty.

V bodě f) je třeba studenty popostrčit odstraněním prvního logaritmu.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

$$a) \log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

$$b) \log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$$

$$c) 2 \log x = \log(x + 6)$$

$$a) \log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

Podmínky: $x^2 + x > 0$, $-2x > 0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

$$x^2 + x = -2x$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$b) \log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$$

Podmínky: $x^2 - x > 0$, $3 - 3x > 0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$$

$$x^2 - x = 3 - 3x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 0: 0^2 + 0 > 0 \text{ - nevyhovuje}$$

$$x_2 = -3: (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 > 0$$

$$-2x = -2(-3) = 6 > 0$$

$$K = \{-3\}$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = -3: (-3)^2 - (-3) = 9 + 3 > 0$$

$$3 - 3(-3) = 3 + 9 > 0$$

$$x_2 = 1: 1^2 - 1 = 0 \text{ - nevyhovuje}$$

$$K = \{-3\}$$

c) $2 \log x = \log(x+6)$

Podmínky: $x > 0$, $x+6 > 0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$$2 \log x = \log(x+6) \text{ - nejde odlogaritmovat, levá strana není logaritmus}$$

$$\log x^2 = \log(x+6) \text{ - teď už můžeme odlogaritmovat}$$

$$x^2 = x+6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 3: 3 > 0$$

$$x_2 = -2: -2 < 0 \text{ nevyhovuje}$$

$$K = \{3\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnice:

a) $\ln \log_2 \log_{0,5} x = 0$ (jinak $\ln(\log_2[\log_{0,5} x]) = 0$)

b) $\log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \frac{1}{3}$

a) $\ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$

Podmínka: $x > 0$.

$$\ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \ln 1 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 1$$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$x = \frac{1}{4} \quad K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

b) $\log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \frac{1}{3}$

Podmínka: $x > 0$.

$$\log_8 \left(2 \log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \log_8 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_8 \left(2 \log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] \right) = \log_8 2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$2 \log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = 2 \quad / : 2$$

$$\log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = 1$$

$$\log_3 \left[1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} \right] = \log_3 3 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$1 + \log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = 3$$

$$\log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = 2$$

$$\log_2 \left\{ 2 - \log_{0,5} x \right\} = \log_2 2^2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$2 - \log_{0,5} x = 4$$

$$-\log_{0,5} x = 2$$

$$\log_{0,5} x = -2 = \log_{0,5} 0,5^{-2} \text{ - odlogaritmuje}$$

$$x = 4 \qquad K = \{4\}$$

Př. 6: Petáková:

strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)

strana 35, cvičení 10 c), d)

Shrnutí: $2 = \log_a a^2$ a pak to odlogaritmuje.