

2.9.20 Logaritmické rovnice II

Předpoklady: 2919

Pedagogická poznámka: Celá hodina je zaměřena na postupy, při kterých se rovnice upravují do tvaru $\log_a(\text{výraz1}) = \log_a(\text{výraz2})$. U žáků, kteří mají problémy se vzorci pro logaritmy, trvám na přepsání vzorců do arezenálu.

Př. 1: Vyřeš rovnice:

a) $\log_3(2x-1) = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$ b) $\frac{\log_4 x - 1}{0,5 + \log_4 3} = 1$
c) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$

a) $\log_3(2x-1) = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$ Podmínky: $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Problém: Na pravé straně potřebujeme jenom jeden logaritmus \Rightarrow pomocí pravidel pro počítání s logaritmy musíme vytvořit jediný logaritmus.

$$\log_3(2x-1) = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$$

$$\log_3(2x-1) = \log_3 4^2 - \log_3 2^3$$

$$\log_3(2x-1) = \log_3 \frac{4^2}{2^3} = \log_3 \frac{2^4}{2^3} = \log_3 2 \quad - \text{rovnost logaritmů} \Rightarrow \text{můžeme odlogaritmovat.}$$

$$2x-1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \quad - \text{vyhovuje podmínce} \Rightarrow K = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

b) $\frac{\log_4 x - 1}{0,5 + \log_4 3} = 1$ Podmínka: $x > 0$.

Vynásobením odstraníme zlomek, pak vytvoříme na obou stranách jeden logaritmus.

$$\log_4 x - 1 = 0,5 + \log_4 3$$

$$\log_4 x - \log_4 4 = \log_4 4^{0,5} + \log_4 3$$

$$\log_4 \frac{x}{4} = \log_4 2 \cdot 3$$

$$\frac{x}{4} = 6$$

$$x = 24 \quad K = \{24\}$$

c) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$ Podmínky: $x > 1, x > -1$.

$$\log_3[(x-1)(x+1)] = \log_3 3$$

$$(x+1)(x-1) = 3$$

$$x^2 - 1 = 3$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$x_2 = -2$ - nevyhovuje podmínice.

$$K = \{2\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\log_6 \sqrt{x+16} + \log_6 \sqrt{x} = 1$

Podmínky: $x > -16$, $x > 0$

Problém: Je možné logaritmy na levé straně spojit do jednoho logaritmu, jedničku na pravé napsat pomocí logaritmu a pak odlogaritmovat

$$\log_6 \sqrt{x+16} + \log_6 \sqrt{x} = 1$$

$$\log_6 (\sqrt{x+16} \cdot \sqrt{x}) = \log_6 6$$

\Rightarrow zůstávají odmocniny, museli bychom umocnit a pak dělat zkoušku.

Leptší možnost: logaritmy umožňují „sundat“ mocniny (a tedy i odmocniny) \Rightarrow vyhneme se zkouškám.

$$\log_6 \sqrt{x+16} + \log_6 \sqrt{x} = 1$$

$$\log_6 \left[(x+16)^{\frac{1}{2}} \right] + \log_6 \left[(x)^{\frac{1}{2}} \right] = 1$$

$$\frac{1}{2} \log_6 (x+16) + \frac{1}{2} \log_6 x = 1 \quad / \cdot 2$$

$$\log_6 (x+16) + \log_6 x = 2$$

$$\log_6 x(x+16) = \log_6 6^2 \quad - \text{rovnost logaritmů} \Rightarrow \text{můžeme odlogaritmovat.}$$

$$x(x+16) = 36$$

$$x^2 + 16x - 36 = 0$$

$$(x+18)(x-2) = 0$$

$$x_1 = -18 \quad - \text{nevyhovuje podmínice} \quad x_2 = 2 \quad K = \{2\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnice:

$$\text{a) } 2 \log 2x^2 + 4 \log x^3 + 2 \log 3 = 3 \log x^4 + 2 + \log x^2$$

$$\text{b) } \log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x^2 - \log_2 3x^3 = \log_2 \frac{1}{x^2} + \log_2 \frac{x^2}{3}$$

$$\text{a) } 2 \log 2x^2 + 4 \log x^3 + 2 \log 3 = 3 \log x^4 + 2 + \log x^2 \quad \text{Podmínka: } x > 0.$$

$$\log (2x^2)^2 + \log (x^3)^4 + \log 3^2 = \log (x^4)^3 + \log 10^2 + \log x^2$$

$$\log (4x^4 \cdot x^{12} \cdot 9) = \log (x^{12} \cdot 100 \cdot x^2)$$

$$4x^4 \cdot x^{12} \cdot 9 = x^{12} \cdot 100 \cdot x^2$$

$$36x^2 = 100$$

$$x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{5}{3} \quad (\text{tento kořen zakazují podmínky})$$

$$K = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

b) $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x^2 - \log_2 3x^3 = \log_2 \frac{1}{x^2} + \log_2 \frac{x^2}{3}$ Podmínka: $x > 0$.

$$\log_2 \frac{\sqrt{x} \cdot 2x^2}{3x^3} = \log_2 \frac{x^2}{x^2 \cdot 3} \quad - \text{odlogaritmuje a pokrátíme.}$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot 2}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$x = \sqrt{x} \cdot 2 \quad /^2 \quad \text{obě strany jsou kladné} \Rightarrow \text{nemusíme dělat zkoušku.}$$

$$x^2 = 4x \quad x > 0 \Rightarrow \text{můžeme dělit } x$$

$$x = 4 \quad K = \{4\}$$

Poznámka: Oba předchozí příklady se často řeší i jiným způsobem, který si ukážeme v příští hodině.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = -2$

b) $\frac{\log_\pi(10+3x)}{\log_\pi(x+4)} = 2$

a) $\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = -2$ Podmínky: $\frac{x+2}{2x-1} > 0 \Rightarrow$ radši vyzkoušíme až vypočtené hodnoty.

$$\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = -2$$

$$\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = \log_2 2^{-2}$$

$$\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = \log_2 \frac{1}{4} \quad - \text{rovnost logaritmů} \Rightarrow \text{můžeme odlogaritmovat.}$$

$$\frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{4} \quad / \cdot 4(2x-1)$$

$$4(x+2) = 2x-1$$

$$4x+8 = 2x-1$$

$$2x = -9$$

$$x = -\frac{9}{2} \quad - \text{ještě vyzkoušet podmínku } \frac{x+2}{2x-1} = \frac{-4,5+2}{2 \cdot (-4,5)-1} = \frac{-2,5}{-10} > 0$$

$$K = \left\{ -\frac{9}{2} \right\}$$

b) $\frac{\log_\pi(10+3x)}{\log_\pi(x+4)} = 2$

Podmínky:

- Vnitřky logaritmů: $10+3x > 0 \Rightarrow x > -\frac{10}{3}$, $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$.
- Jmenovatel zlomku: $\log_\pi(x+4) \neq 0 \Rightarrow x+4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$.

Problém: Nemůžeme udělat vlevo jeden logaritmus, nemáme vzorec, který by dělal z podílu logaritmů jeden logaritmus.

\Rightarrow Vynásobíme rovnici jmenovatelem, abychom druhý logaritmus dostali na pravou stranu.

$$\frac{\log_{\pi}(10+3x)}{\log_{\pi}(x+4)} = 2 \quad / \cdot \log_{\pi}(x+4)$$

$$\log_{\pi}(10+3x) = 2\log_{\pi}(x+4)$$

$$\log_{\pi}(10+3x) = \log_{\pi}(x+4)^2 \quad - \text{rovnost logaritmů} \Rightarrow \text{můžeme odlogaritmovat.}$$

$$10+3x = (x+4)^2$$

$$10+3x = x^2 + 8x + 16$$

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+2)(x+3) = 0$$

$$x_1 = -2 \quad - \text{vyhovuje podmínice} \quad x_2 = -3 \quad - \text{nevyhovuje podmínice}$$

$$K = \{-2\}$$

Př. 5: Petáková:

strana 35, cvičení 11 b), d), f), g), h), i)

strana 35, cvičení 12 c)

strana 35, cvičení 13 a), c)

Shrnutí: Rovnice, které neobsahují mocniny logaritmů s neznámou, můžeme upravit na tvar $\log_a(\text{výraz1}) = \log_a(\text{výraz2})$ a pak řešit odlogaritmováním.