

2.9.21 Logaritmické rovnice III

Předpoklady: 2920

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{1-2\log x}{3+\log x} = \frac{4-2\log x}{5+\log x}$.

Podmínky:

- Vnitřky logaritmů: $x > 0$.
- Zlomky: $3 + \log x \neq 0 \Rightarrow \log x \neq -3 \Rightarrow x \neq 0,001$
 $5 + \log x \neq 0 \Rightarrow \log x \neq -5 \Rightarrow x \neq 0,00001$

Problém: Jednotlivé strany nemůžeme upravit na jeden logaritmus (obsahují podíl), nepomůže ani vynásobení rovnice jmenovateli, protože se nám objeví druhé mocniny logaritmu.

Nápad: V rovnici se neznámá vyskytuje pouze jako $\log x \Rightarrow$ můžeme použít substituci.

$$\frac{1-2\log x}{3+\log x} = \frac{4-2\log x}{5+\log x}$$

Substituce: $y = \log x$

$$\frac{1-2y}{3+y} = \frac{4-2y}{5+y} \quad / (3+y)(5+y)$$

$$(1-2y)(5+y) = (4-2y)(3+y)$$

$$5+y-10y-2y^2 = 12+4y-6y-2y^2$$

$$5-9y = 12-2y$$

$$-7y = 7$$

$$y = -1$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log x = -1$$

$$\log x = \log 10^{-1}$$

$$x = 0,1$$

$$K = \{0,1\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $3\log_4 x(2\log_4 x - 1) = 2(1 - \log_4 x)$.

Stejně jako předchozí příklad: Po roznásobení by se opět objevila druhá mocnina, neznámá je pouze ve výrazu $\log_4 x \Rightarrow$ substituce.

$$3\log_4 x(2\log_4 x - 1) = 2(1 - \log_4 x) \quad \text{Podmínka: } x > 0.$$

Substituce: $y = \log_4 x$

$$3y(2y-1) = 2(1-y)$$

$$6y^2 - 3y = 2 - 2y$$

$$6y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$y_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log_4 x_1 = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = \log_4 x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_4 x_1 = \log_4 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_4 x_2 = \log_4 4^{-\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{16}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ \sqrt[3]{16}; \frac{1}{2} \right\}$$

Př. 3: Uprav následující logaritmy na výrazy, které obsahují neznámou pouze ve výrazu $\log_a x$:

a) $\log_2 8x$

b) $\log_9 \frac{x}{\sqrt{3}}$

c) $\log x^3$

d) $\log_2 \frac{4}{x^3}$

e) $\log 100x^3$

f) $2\log_4 4x^3$

g) $\log_2^2 2x$

h) $\log_3^2 9x^3$

a) $\log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x$

b) $\log_9 \frac{x}{\sqrt{3}} = \log_9 x - \log_9 \sqrt{3} = \log_9 x - 0,25$

c) $\log x^3 = 3\log x$

d) $\log_2 \frac{4}{x^3} = \log_2 4 - \log_2 x^3 = 2 - 3\log_2 x$

e) $\log 100x^3 = \log 100 + \log x^3 = 2 + 3\log x$

f) $2\log_4 4x^3 = 2(\log_4 4 + \log_4 x^3) = 2(1 + 3\log_4 x) = 2 + 6\log_4 x$

g) $\log_2^2 2x = (\log_2 2x)^2 = (\log_2 2 + \log_2 x)^2 = (1 + \log_2 x)^2$

h) $\log_3^2 9x^3 = (\log_3 9x^3)^2 = (\log_3 9 + \log_3 x^3)^2 = (2 + 3\log_3 x)^2$

Pedagogická poznámka: Společnou kontrolu předchozího příkladu provádíme nadvakrát – po bodu d) a nakonec.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $2\log_3 9x + \log_3 \frac{1}{x} = \log_3 x^3 + \log_3 27$

b) $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x^2 - \log_2 3x^3 = \log_2 \frac{1}{x^2} + \log_2 \frac{x^2}{3}$

c) $2\log 2x^2 + 4\log x^3 + 2\log 3 = 3\log x^4 + 2 + \log x^2$

d) $\log_4 (3x+2) - 2\log_4 x = 2 - \log_4 8$

a) $2\log_3 9x + \log_3 \frac{1}{x} = \log_3 x^3 + \log_3 27$

Podmínky: $x > 0$.

$2(2 + \log_3 x) - \log_3 x = 3\log_3 x + 3$

Substitute: $y = \log_3 x$

$$2(2+y) - y = 3y + 3$$

$$4 + 2y - y = 3y + 3$$

$$1 = 2y$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$K = \{\sqrt{3}\}$$

b) $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x^2 - \log_2 3x^3 = \log_2 \frac{1}{x^2} + \log_2 \frac{x^2}{3}$ Podmínky: $x > 0$.

podobný příklad jako předchozí, jen bude obtížnější práce s rozkladem logaritmů

$$\log_2 x^{\frac{1}{2}} + \log_2 2 + \log_2 x^2 - (\log_2 3 + \log_2 x^3) = \log_2 x^{-2} + \log_2 x^2 - \log_2 3$$

$$0,5 \log_2 x + 1 + 2 \log_2 x - \log_2 3 - 3 \log_2 x = -2 \log_2 x + 2 \log_2 x - \log_2 3$$

$$-0,5 \log_2 x + 1 - \log_2 3 = -\log_2 3$$

$$-0,5 \log_2 x = -1$$

$$\log_2 x = 2$$

$$\log_2 x = \log_2 2^2$$

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

c) $2 \log 2x^2 + 4 \log x^3 + 2 \log 3 = 3 \log x^4 + 2 + \log x^2$ Podmínky: $x > 0$.

Problém: x se vyskytuje v logaritmech v různých mocninách

\Rightarrow musíme všude vyrobít jen $\log x$.

$$2 \log 2x^2 + 4 \log x^3 + 2 \log 3 = 3 \log x^4 + 2 + \log x^2$$

$$2(\log 2 + 2 \log x) + 4 \cdot 3 \log x + 2 \log 3 = 3 \cdot 4 \log x + 2 + 2 \log x$$

$$2 \log 2 + 4 \log x + 12 \log x + 2 \log 3 = 12 \log x + 2 + 2 \log x$$

$$2 \log 2 + 2 \log x + 2 \log 3 = 2$$

$$2 \log x = 2 - 2 \log 2 - 2 \log 3 \quad /: 2$$

$$\log x = 1 - \log 2 - \log 3$$

$$\log x = \log 10 - \log 2 - \log 3$$

$$\log x = \log \frac{10}{2 \cdot 3}$$

$$\log x = \log \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$K = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

d) $\log_4 (3x+2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$ Podmínky: $3x+2 > 0, x > 0$.

Problém: První závorku se nám rozložit nepodaří (obsahuje sčítání) \Rightarrow tento příklad není podobný ostatním, musíme převést obě strany na jediný logaritmus, jak jsme to dělali v minulé hodině.

$$\log_4(3x+2) - \log_4 x^2 = \log_4 16 - \log_4 8$$

$$\log_4\left(\frac{3x+2}{x^2}\right) = \log_4 \frac{16}{8}$$

$$\frac{3x+2}{x^2} = 2$$

$$3x+2 = 2x^2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \quad x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \text{ (nevyhovuje podmínkám)} \quad K = \{2\}$$

Pedagogická poznámka: Je zajímavé sledovat, jak se studenti postaví k bodu d). Úprava $\log_4(3x+2) = \log_4 3x + \log_4 2$ samozřejmě ukazuje na to, že dotyčný student upravuje zcela automaticky a na nějaká pravidla se neohlíží.

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\log x^2 (\log x + 1) = 3 + \log x^{-3}$.

Příklad opět vede k druhé mocnině logaritmu \Rightarrow použijeme substituci

Problém: neznámá se vyskytuje v různých druzích výrazů \Rightarrow všechny výrazy upravíme tak, aby obsahovaly pouze $\log x$

$$\log x^2 (\log x + 1) = 3 + \log x^{-3}$$

$2 \log x (\log x + 1) = 3 - 3 \log x$ teď už můžeme použít substituci

Substitute: $y = \log x$

$$2y(y+1) = 3 - 3y$$

$$2y^2 + 2y = 3 - 3y$$

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$y_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \quad y_2 = \frac{-5-7}{4} = -3$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \log x_2 = -3$$

$$\log x_1 = \log 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\log x_2 = \log 10^{-3}$$

$$x_2 = 0,001$$

$$x_1 = \sqrt{10}$$

$$K = \{\sqrt{10}; 0,001\}$$

Př. 6: Petáková:
strana 35, cvičení 14 b), d)

strana 36, cvičení 15 b)
strana 36, cvičení 16 b), d)

Shrnutí: Pokud se v rovnici objevují druhé mocniny logaritmů z neznámé, můžeme použít substituci. Před tím je však většinou potřeba upravit logaritmy tak, aby měly všechny logaritmy s neznámou stejný tvar.