2.9.21 Logaritmické rovnice III

Předpoklady: 2920

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{1-2\log x}{3+\log x}=\frac{4-2\log x}{5+\log x}$.

Podmínky:

- Vnitřky logaritmů: $x>0$.
- Zlomky: $3+\log x\neq 0 \Rightarrow \log x\neq -3 \Rightarrow x\neq 0{,}001$
  $5+\log x\neq 0 \Rightarrow \log x\neq -5 \Rightarrow x\neq 0{,}00\,001$

Problém: Jednotlivé strany nemůžeme upravit na jeden logaritmus (obsahují podíl), nepomůže ani vynásobení rovnice jmenovateli, protože se nám objeví druhé mocniny logaritmu.

Nápad: V rovnice se neznámá vyskytuje pouze jako $\log x$ $\Rightarrow$ můžeme použít substituci.

$$\frac{1-2\log x}{3+\log x}=\frac{4-2\log x}{5+\log x}$$

Substituce: $y=\log x$

$$\frac{1-2y}{3+y}=\frac{4-2y}{5+y} \quad /(3+y)(5+y)$$

$$(1-2y)(5+y)=(4-2y)(3+y)$$

$$5+y-10y-2y^2=12+4y-6y-2y^2$$

$$5-9y=12-2y$$

$$-7y=7$$

$$y=-1$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=\log x=-1$$

$$\log x=\log 10^{-1}$$

$$x=0{,}1 \qquad K=\{0{,}1\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $3\log_4 x(2\log_4 x-1)=2(1-\log_4 x)$.

Stejné jako předchozí příklad: Po roznásobení by se opět objevila druhá mocnina, neznámá je pouze ve výrazu $\log_4 x$ $\Rightarrow$ substituce.

$3\log_4 x(2\log_4 x-1)=2(1-\log_4 x)$ Podmínka: $x>0$.

Substituce: $y=\log_4 x$

$$3y(2y-1)=2(1-y)$$

$$6y^2-3y=2-2y$$

$$6y^2-y-2=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 7}{12}$$

$y_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $y_2 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \log_4 x_1 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $y_2 = \log_4 x_2 = -\frac{1}{2}$

$\log_4 x_1 = \log_4 4^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $\log_4 x_2 = \log_4 4^{-\frac{1}{2}}$

$x_1 = \sqrt[3]{16}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1}{2}$

$K = \left\{\sqrt[3]{16}; \frac{1}{2}\right\}$

Př. 3: Uprav následující logaritmy na výrazy, které obsahují neznámou pouze ve výrazu $\log_a x$:

a) $\log_2 8x$ $\qquad$ b) $\log_9 \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ c) $\log x^3$ $\qquad$ d) $\log_2 \frac{4}{x^3}$

e) $\log 100x^3$ $\qquad$ f) $2\log_4 4x^3$ $\qquad$ g) $\log_2^2 2x$ $\qquad$ h) $\log_3^2 9x^3$

a) $\log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x$ $\qquad$ b) $\log_9 \frac{x}{\sqrt{3}} = \log_9 x - \log_9 \sqrt{3} = \log_9 x - 0,25$

c) $\log x^3 = 3\log x$ $\qquad$ d) $\log_2 \frac{4}{x^3} = \log_2 4 - \log_2 x^3 = 2 - 3\log_2 x$

e) $\log 100x^3 = \log 100 + \log x^3 = 2 + 3\log x$

f) $2\log_4 4x^3 = 2\left(\log_4 4 + \log_4 x^3\right) = 2\left(1 + 3\log_4 x\right) = 2 + 6\log_4 x$

g) $\log_2^2 2x = \left(\log_2 2x\right)^2 = \left(\log_2 2 + \log_2 x\right)^2 = \left(1 + \log_2 x\right)^2$

h) $\log_3^2 9x^3 = \left(\log_3 9x^3\right)^2 = \left(\log_3 9 + \log_3 x^3\right)^2 = \left(2 + 3\log_3 x\right)^2$

Pedagogická poznámka: Společnou kontrolu předchozího příkladu provádíme nadvakrát – po bodu d) a nakonec.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $2\log_3 9x + \log_3 \frac{1}{x} = \log_3 x^3 + \log_3 27$

b) $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x^2 - \log_2 3x^3 = \log_2 \frac{1}{x^2} + \log_2 \frac{x^2}{3}$

c) $2\log 2x^2 + 4\log x^3 + 2\log 3 = 3\log x^4 + 2 + \log x^2$

d) $\log_4 (3x+2) - 2\log_4 x = 2 - \log_4 8$

a) $2\log_3 9x + \log_3 \frac{1}{x} = \log_3 x^3 + \log_3 27$ $\qquad$ Podmínky: $x > 0$.

$2\left(2 + \log_3 x\right) - \log_3 x = 3\log_3 x + 3$

Substituce: $y = \log_3 x$

$2(2+y)-y=3y+3$
$4+2y-y=3y+3$
$1=2y$

Návrat k původní proměnné:

$y=\log_3 x=\frac{1}{2}$

$\log_3 x=\log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$x=\sqrt{3}$ $K=\{\sqrt{3}\}$

b) $\log_2 \sqrt{x}+\log_2 2x^2-\log_2 3x^3=\log_2 \frac{1}{x^2}+\log_2 \frac{x^2}{3}$ Podmínky: $x>0$.

podobný příklad jako předchozí, jen bude obtížnější práce s rozkladem logaritmů

$\log_2 x^{\frac{1}{2}}+\log_2 2+\log_2 x^2-\left(\log_2 3+\log_2 x^3\right)=\log_2 x^{-2}+\log_2 x^2-\log_2 3$

$0,5\log_2 x+1+2\log_2 x-\log_2 3-3\log_2 x=-2\log_2 x+2\log_2 x-\log_2 3$

$-0,5\log_2 x+1-\log_2 3=-\log_2 3$

$-0,5\log_2 x=-1$

$\log_2 x=2$

$\log_2 x=\log_2 2^2$

$x=4$ $K=\{4\}$

c) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$ Podmínky: $x>0$.

Problém: x se vyskytuje v logaritmech v různých mocninách
$\Rightarrow$ musím všude vyrobit jen $\log x$.

$2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$

$2(\log 2+2\log x)+4\cdot 3\log x+2\log 3=3\cdot 4\log x+2+2\log x$

$2\log 2+4\log x+12\log x+2\log 3=12\log x+2+2\log x$

$2\log 2+2\log x+2\log 3=2$

$2\log x=2-2\log 2-2\log 3 \quad /:2$

$\log x=1-\log 2-\log 3$

$\log x=\log 10-\log 2-\log 3$

$\log x=\log \frac{10}{2\cdot 3}$

$\log x=\log \frac{5}{3}$

$x=\frac{5}{3}$ $K=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

d) $\log_4 (3x+2)-2\log_4 x=2-\log_4 8$ Podmínky: $3x+2>0$, $x>0$.

Problém: První závorku se nám rozložit nepodaří (obsahuje sčítání) $\Rightarrow$ tento příklad není podobný ostatním, musíme převést obě strany na jediný logaritmus, jak jsme to dělali v minulé hodině.

$\log_4(3x+2)-\log_4 x^2=\log_4 16-\log_4 8$

$\log_4\left(\frac{3x+2}{x^2}\right)=\log_4\frac{16}{8}$

$\frac{3x+2}{x^2}=2$

$3x+2=2x^2$

$2x^2-3x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=2$ $\quad$ $x_2=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ (nevyhovuje podmínkám) $\quad$ $K=\{2\}$

Pedagogická poznámka: V bodu c) mají studenti problémy s tím, že nedokáží
Je zajímavé sledovat, jak se studenti postaví k bodu d). Úprava $\log_4(3x+2)=\log_4 3x+\log_4 2$ samozřejmě ukazuje na to, že dotyčný student upravuje zcela automaticky a na nějaká pravidla se neohlíží.

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\log x^2(\log x+1)=3+\log x^{-3}$.

Příklad opět vede k druhé mocnině logaritmů $\Rightarrow$ použijeme substituci
Problém: neznámá se vyskytuje v různých druzích výrazů $\Rightarrow$ všechny výrazy upravíme tak, aby obsahovaly pouze $\log x$

$\log x^2(\log x+1)=3+\log x^{-3}$

$2\log x(\log x+1)=3-3\log x$ teď už můžeme použít substituci

Substituce: $y=\log x$

$2y(y+1)=3-3y$

$2y^2+2y=3-3y$

$2y^2+5y-3=0$

$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm7}{4}$

$y_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $y_2=\frac{-5-7}{4}=-3$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=\log x_1=\frac{1}{2}$

$\log x_1=\log 10^{\frac{1}{2}}$

$x_1=\sqrt{10}$

$y_2=\log x_2=-3$

$\log x_2=\log 10^{-3}$

$x_2=0,001$

$K=\{\sqrt{10};0,001\}$

Př. 6: Petáková:
strana 35, cvičení 14 b), d)

strana 36, cvičení 15 b)
strana 36, cvičení 16 b), d)

Shrnutí: Pokud se v rovnici objevují druhé mocniny logaritmů z neznámé, můžeme použít substituci. Před tím však většinou potřeba upravit logaritmy tak, aby měly všechny logaritmy s neznámou stejný tvar.