

2.9.22 Logaritmické rovnice IV

Předpoklady: 2921

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 \frac{4}{x} + \log_2^2 2x = 9$.

Podmínky: $x > 0$

Problém: Nemáme co substituovat (logaritmy obsahují různé výrazy), i když to vypadá, že rovnice je kvadratická pro $\log_2 x \Rightarrow$ zkusíme pomocí vzorců rozebrat výrazy v logaritmech, abychom získali pouze $\log_2 x$.

$$\log_2 \frac{4}{x} + \log_2^2 2x = 9 \quad - \text{ abychom neudělali zbytečnou chybu, napíšeme si } \log_2^2 2x = (\log_2 2x)^2$$

$$\log_2 \frac{4}{x} + (\log_2 2x)^2 = 9$$

$$\log_2 4 - \log_2 x + (\log_2 2 + \log_2 x)^2 = 9$$

$$2 - \log_2 x + (1 + \log_2 x)^2 = 9$$

Substitute: $y = \log_2 x$

$$2 - y + (1 + y)^2 = 9$$

$$2 - y + 1 + 2y + y^2 = 9$$

$$y^2 + y + 3 = 9$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

$$y_1 = -3 \qquad y_2 = 2$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log_2 x_1 = -3$$

$$y_2 = \log_2 x_2 = 2$$

$$\log_2 x_1 = \log_2 2^{-3}$$

$$\log_2 x_2 = \log_2 2^2$$

$$x_1 = \frac{1}{8}$$

$$x_2 = 4$$

$$K = \left\{ \frac{1}{8}; 4 \right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\log_2 8x^2 + \log_2^2 2x^2 = 8$.

Podmínky: $x \neq 0$ (v logaritmech jsou pouze druhé mocniny $x \Rightarrow$ každý výsledek můžeme použít i s jeho opačným číslem).

Problém: podobně jako v předchozím příkladě musíme před substitucí zjednodušit výrazy uvnitř logaritmů.

$$\log_2 8x^2 + \log_2^2 2x^2 = 8$$

$$\log_2 8 + \log_2 x^2 + (\log_2 2 + \log_2 x^2)^2 = 8$$

$$3 + 2\log_2 x + (1 + 2\log_2 x)^2 = 8$$

Substitute: $y = \log_2 x$

$$3 + 2y + (1 + 2y)^2 = 8$$

$$3 + 2y + 1 + 4y + 4y^2 = 8$$

$$4y^2 + 6y - 4 = 0 \quad / : 2$$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \qquad y_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log_2 x_1 = -2$$

$$\log_2 x_1 = \log_2 2^{-2}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \log_2 x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 x_2 = \log_2 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \sqrt{2}$$

$$K = \left\{ \pm \frac{1}{4}; \pm \sqrt{2} \right\}$$

Ke každému vypočtenému kořenu přidáme jeho opačné číslo.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu záleží na substituci, kterou studenti zvolí.

Občas někteří substituuji $y = \log_2 x^2$ (není to zase tak vzácné). Pokud se někdo takový objeví, nechte studenty příklad dopočítat a pak je vyzvěte, aby zkusili vysvětlit fakt, že většina třídy má polovinu kořenů.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^{\log_3 x} = 27x^2$.

Podmínky: $x > 0$.

Problém: neznámá se vyskytuje v exponentu \Rightarrow rovnici zlogaritmuje při základu 3 (tento základ už se v rovnici vyskytuje), pak budeme moci použít větu pro exponent uvnitř logaritmu (jak už jsme dělali u exponenciálních rovnic).

$$x^{\log_3 x} = 27x^2 \quad - \text{zlogaritmuje rovnici při základu 3}$$

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 27x^2$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 27 + \log_3 x^2$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 3^3 + 2\log_3 x$$

Substitute: $y = \log_3 x$

$$y^2 = 3 + 2y$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y-3)(y+1) = 0$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = -1$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log_3 x_1 = 3$$

$$y_2 = \log_3 x_2 = -1$$

$$\log_3 x_1 = \log_3 3^3$$

$$x_1 = 27$$

$$\log_3 x_2 = \log_3 3^{-1}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{3}; 27 \right\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\log_2 x - 2\log_4 x + \log_8 x = 1$.

Podmínky: $x > 0$.

Problém: Každý logaritmus má jiný základ \Rightarrow použijeme vzorec pro změnu základu a převedeme všechno na základ 2.

$$\log_2 x - 2\log_4 x + \log_8 x = 1$$

$$\log_2 x - 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 1$$

$$\log_2 x - 2 \frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{3} = 1$$

$$\log_2 x - \log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} = 1$$

$$\frac{\log_2 x}{3} = 1$$

$$\log_2 x = 3$$

$$\log_2 x = \log_2 2^3$$

$$x = 8$$

$$K = \{8\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq \frac{1}{4}$.

Problém: Neznámá je v základech logaritmu \Rightarrow převedeme logaritmy na jiný základ (konkrétně základ 2, protože logaritmy obsahují spousty dvojek).

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 2x} = \frac{\log_2 2}{\log_2 4x}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 x}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{2 + \log_2 x}$$

Substituce: $y = \log_2 x$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+y} = \frac{1}{2+y} \quad / \cdot y(1+y)(2+y)$$

$$2+y = y(1+y)$$

$$2 = y^2$$

$$y_1 = \sqrt{2}$$

$$y_2 = -\sqrt{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \log_2 x_1 = \sqrt{2}$$

$$\log_2 x_1 = \log_2 2^{\sqrt{2}}$$

$$x_1 = 2^{\sqrt{2}}$$

$$K = \{2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\}$$

$$y_2 = \log_2 x_2 = -\sqrt{2}$$

$$\log_2 x_2 = \log_2 2^{-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$$

Př. 6: Petáková:

strana 36, cvičení 17 b), d)

strana 36, cvičení 18 a), e), f)

strana 36, cvičení 19 c), f)

strana 36, cvičení 20 a), d)

Shrnutí: Pokud se neznámá vyskytuje v logaritmech o různých základech, můžeme použít vzorec na změnu základu.