

2.9.25 Logaritmické nerovnice II

Předpoklady: 2924

Pedagogická poznámka: Většina studentů spočítá pouze první tři příklady, nejlepší se dostanou až k pátému.

Pedagogická poznámka: U následujících dvou příkladů je opět nutné s některými studenty probrat, proč v jednom příkladu při návratu ze substituce děláme sjednocení a v jiném na stejném místě hledáme průnik.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $3\log_3^2 x - 27\log_3 x \geq \log_3 x - 9$.

Podmínky: $x > 0$.

Neznámá se vyskytuje pouze ve výrazu $\log_3 x \Rightarrow$

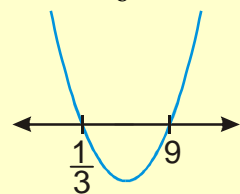
Substituce: $y = \log_3 x$

$$3y^2 - 27y \geq y - 9$$

$3y^2 - 28y + 9 \geq 0$ - kvadratická nerovnice \Rightarrow najdeme nulové body.

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm 26}{6}$$

$$y_1 = \frac{28+26}{6} = 9 \qquad y_2 = \frac{28-26}{6} = \frac{1}{3}$$



Hledáme části grafu nad osou $x \Rightarrow y \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \langle 9; \infty$.

Návrat k původní proměnné: $y = \log_3 x$

Prepíšeme interval hodnot $y = \log_3 x$ pomocí nerovnic:

$$\log_3 x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \langle 9; \infty \rangle \Leftrightarrow y = \log_3 x \leq \frac{1}{3} \text{ nebo } y = \log_3 x \geq 9$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

$$\log_3 x \leq \frac{1}{3}$$

$\log_3 x \leq \log_3 3^{\frac{1}{3}}$ odlogaritmuje, základ je větší než 1 \Rightarrow zachováváme nerovnost.

$$x \leq \sqrt[3]{3}$$

Nerovnosti vyhovuje interval $\left(-\infty; \sqrt[3]{3}\right)$, ale musíme splňovat podmínku $x > 0 \Rightarrow$

$$\log_3 x \geq 9$$

$\log_3 x \geq \log_3 3^9$ odlogaritmuje, základ je větší než 1 \Rightarrow zachováváme nerovnost.
 $x \geq 3^9$

Nerovnosti vyhovuje interval $\langle 3^9; \infty$, který splňuje podmínku $x > 0 \Rightarrow$

$$K_2 = \langle 3^9; \infty \rangle.$$

$$K_1 = (0; \sqrt[3]{3}).$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (0; \sqrt[3]{3}) \cup (3^9; \infty)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - 16 < 0$.

Podmínky: $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$.

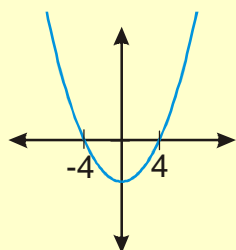
$$\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - 16 < 0$$

Substitute: $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

$$y^2 - 16 = 0$$

$$(y-4)(y+4) = 0$$

Nulové body grafu: $y_1 = 4$, $y_2 = -4$.



Hledáme části grafu pod osou x : $y \in (-4; 4)$.

Návrat k původní proměnné:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = y \in (-4; 4)$$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ pomocí nerovnic:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \in (-4; 4) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -4 \text{ a zároveň } \log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 4.$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, a protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}} 16 \text{ základ logaritmu je}$$

menší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování obrací.

$$x-2 < 16$$

$$x < 18$$

$$K_1 = (2; 18) - \text{podmínka } x > 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < 4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} \text{ základ logaritmu je}$$

menší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování obrací.

$$x-2 > \frac{1}{16}$$

$$x > \frac{1}{16} + 2 = \frac{33}{16}$$

	$K_2 = \left(\frac{33}{16}; \infty\right)$
--	--

Hledáme průnik množin $K_1 = (2; 18)$ a $K_2 = \left(\frac{33}{16}; \infty\right) \Rightarrow K = K_1 \cap K_2 = \left(\frac{33}{16}; 18\right)$.

Pedagogická poznámka: Největším problémem předchozího příkladu je samotné vyřešení kvadratické nerovnice. Protože v rovnici chybí lineární člen, většina studentů ji neřeší jako kvadratickou, ale upraví ji do tvaru $y^2 < 16$ a poté ji odmocní.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $|\log x - 1| \leq 2$.

Podmínky: $x > 0$.

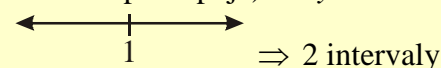
Problém: Absolutní hodnota i logaritmus \Rightarrow problémy si rozdělíme, nejdříve absolutní hodnota, pak logaritmus \Rightarrow substituce.

Substituce: $y = \log x$.

$$|y - 1| \leq 2$$

Odstranění absolutní hodnoty dělením R na intervaly

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) $\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.



$$y \in (-\infty; 1) \quad y - 1 \leq 0 \Rightarrow |y - 1| = -(y - 1) = -y + 1$$

Řešíme nerovnici: $|y - 1| \leq 2$.

$$-y + 1 \leq 2$$

$$-1 \leq y$$

Nerovnosti vyhovuje interval $\langle -1; \infty \rangle$, ale

počítáme pouze s čísly v intervalu $y \in (-\infty; 1)$

$$\Rightarrow K_1 = \langle -1; 1 \rangle.$$

$$y \in \langle 1; \infty \rangle \quad y - 1 \geq 0 \Rightarrow |y - 1| = y - 1$$

Řešíme nerovnici: $|y - 1| \leq 2$.

$$y - 1 \leq 2$$

$$y \leq 3$$

Nerovnosti vyhovuje interval $y \in (-\infty; 3]$, ale

počítáme pouze s čísly v intervalu $y \in \langle 1; \infty \rangle$

$$\Rightarrow K_2 = \langle 1; 3 \rangle.$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -1; 3 \rangle$$

Návrat k původní proměnné:

$$\log x = y \in \langle -1; 3 \rangle$$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log x$ pomocí nerovnic:

$\log x \in \langle -1; 3 \rangle \Leftrightarrow \log x \geq -1$ a zároveň $\log x \leq 3$	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.	
$\log x \geq -1$ $\log x \geq \log 10^{-1}$ Základ logaritmu je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování zachovává. $x \geq 0,1$ $K_1 = \langle 0,1; \infty \rangle$	$\log x \leq 3$ $\log x \leq \log 10^3$ Základ logaritmu je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování zachovává. $x \leq 1000$ $K_2 = (-\infty; 1000]$

Hledáme průnik množin $K_1 = \langle 0, 1; \infty \rangle$ a $K_2 = \langle \infty; 1000 \rangle$.

$$K = K_1 \cap K_2 = \langle 0, 1; 1000 \rangle$$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\log_2(x+3) \cdot \log_{0,3}(2-x) > 0$.

Podmínky: $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$, $2-x > 0 \Rightarrow x < 2$.

Problém: zdánlivě neřešitelný příklad:

- Mezi logaritmy je součin \Rightarrow nemůžeme je spojit dohromady.
- Každý logaritmus má jiný základ.
- Uvnitř logaritmů je sčítání a tak je nemůžeme rozdělit.

Nápad: Na pravé straně je nula \Rightarrow nezáleží na hodnotách jednotlivých logaritmů, pouze na jejich znaménkách (podobně jako u nerovnice v součinném tvaru) \Rightarrow zjistíme si, jak se mění znaménka logaritmů v součinu, a podle toho se rozhodneme.

$$\log_2(x+3) > 0$$

$$\log_{0,3}(2-x) > 0$$

$\log_2(x+3) > \log_2 2^0$ odlogaritmuje, základ $\log_{0,3}(2-x) > \log_{0,3} 0,3^0$ odlogaritmuje, je větší než 1 \Rightarrow nerovnost zachováváme. základ je menší než 1 \Rightarrow nerovnost obracíme.

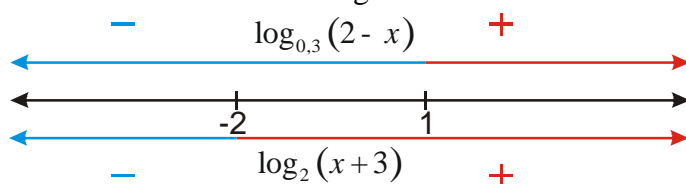
$$x+3 > 1$$

$$2-x < 1$$

$$x > -2$$

$$x > 1$$

Nakreslíme si znaménka logaritmů nad číselnou osu:



Součin dvou čísel je kladný, pokud jsou obě čísla kladná nebo obě čísla záporná \Rightarrow zdánlivě jsou kořeny $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$, musíme uplatnit podmínky: $x > -3$, $x < 2 \Rightarrow$

$$K = (-3; -2) \cup (1; 2).$$

Př. 5: Vyřeš soustavu nerovnic $1 \leq |\log x| \leq 3$.

Podmínky: $x > 0$.

Substitute: $y = \log x$.

$$1 \leq |y| \leq 3$$

Odstranění absolutní hodnoty dělením R na intervaly

$$\begin{array}{c} \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ | \\ 0 \end{array} \Rightarrow 2 \text{ intervaly.}$$

$$y \in (-\infty; 0) \quad y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$$

$$y \in \langle 0; \infty \rangle \quad y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$$

Řešíme soustavu nerovnic: $1 \leq -y \leq 3$.

Řešíme soustavu nerovnic: $1 \leq y \leq 3$.

$$1 \leq -y \Rightarrow -1 \geq y$$

$$\Rightarrow K_2 = \langle 1; 3 \rangle$$

$$-y \leq 3 \Rightarrow y \geq -3$$

$$\Rightarrow K_1 = \langle -3; -1 \rangle$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$$

Návrat k původní proměnné (každý z intervalů spočteme zvlášť):

$$\log x = y \in \langle -3; -1 \rangle$$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log x$ pomocí nerovnic:

$\log x \in \langle -3; -1 \rangle \Leftrightarrow \log x \geq -3$ a zároveň $\log x \leq -1$.	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.	
$\log x \geq -3$ $\log x \geq \log 10^{-3}$ Základ logaritmu je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování zachovává. $x \geq 0,001$ $K_{11} = \langle 0,001; \infty \rangle$	$\log x \leq -1$ $\log x \leq \log 10^{-1}$ Základ logaritmu je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování zachovává. $x \leq 0,1$ $K_{12} = \langle -\infty; 0,1 \rangle$

Hledáme průnik množin $K_1 = \langle 0,001; \infty \rangle$ a $K_2 = \langle -\infty; 0,1 \rangle$

$$K_1 = K_{11} \cap K_{12} = \langle 0,001; 0,1 \rangle$$

$$\log x = y \in \langle 1; 3 \rangle$$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log x$ pomocí nerovnic:

$\log x \in \langle 1; 3 \rangle \Leftrightarrow \log x \geq 1$ a zároveň $\log x \leq 3$.	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.	
$\log x \geq 1$ $\log x \geq \log 10^1$ Základ logaritmu je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování zachovává. $x \geq 10$ $K_{21} = \langle 10; \infty \rangle$	$\log x \leq 3$ $\log x \leq \log 10^3$ Základ logaritmu je větší než jedna \Rightarrow nerovnost se při odlogaritmování zachovává. $x \leq 1000$ $K_{22} = \langle -\infty; 1000 \rangle$

Hledáme průnik množin $K_{21} = \langle 10; \infty \rangle$ a $K_{22} = \langle -\infty; 1000 \rangle$.

$$K_2 = K_{21} \cap K_{22} = \langle 10; 1000 \rangle$$

Celkový výsledek získáme jako sjednocení z obou intervalů:

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle 0,001; 0,1 \rangle \cup \langle 10; 1000 \rangle.$$

Př. 6: Petáková:

strana 38/cvičení 32 d)

strana 38/cvičení 33 d)

strana 38/cvičení 34 b)

strana 38/cvičení 35 c)

strana 38/cvičení 38 d)

strana 39/cvičení 40 c)

Shrnutí: