3.1.1 Přímka a její části

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Úvod do geometrie patří z hlediska výuky mezi nejproblematičtější části středoškolské matematiky. Několik prvních hodin obsahuje opakování pojmů a poznatků ze základní školy nebo soupisy termínů. Pro studenty jsou takové hodiny velmi nudné a ve skutečnosti vůbec nepotřebují pomoc učitele, protože tyto hodiny prakticky neobsahují látku, která vyžaduje nějaké pochopení.
Proto jsem se rozhodl tyto hodiny zařadit jako nácvik samostudia. Studenti si tyto hodiny (kromě úvodního povídání) přečtou sami, udělají si slovníček termínů, které si nepamatují. Tento slovníček pak mohou používat jak při hodinách tak při písemkách. Slovníčky si kontroluji. Druhou kontrolou domácího samostudia je hodina, která obsahuje řešení příkladů, které na probrané učivo navazují a pak následuje speciální písemka.

Geometrie – původně věda o „měření země" (geo + metrein) $\Rightarrow$ praktický význam u pozemků) $\Rightarrow$ vylepšování + abstrakce (žádný bod ve skutečnosti neexistuje, nic nemůže mít stejné vlastnosti jako přímka) $\Rightarrow$ ve starověku (díky Řekům) nejvýznamnější a nejrozvinutější část matematiky (i kvůli neúspěchům s druhou odmocninou u čísel). Výsadní postavení ztratila až v 16. století.
Nejzajímavější částí české středoškolské matematiky zůstává dodnes.

Kolem roku 300 př. n.l.: **Euklides – Základy** – první matematická učebnice v moderním smyslu slova, začíná u postulátů (výroky považované za pravdivé) a z nich vyvozuje a dokazuje tvrzení (věty)

Nebudeme to dělat po něm, ale všechno, co budeme probírat (i zbytek geometrie) vychází z pěti postulátů:

1. Každé dva body mohou být spojeny přímkou.
2. Každá úsečka může být nekonečně prodloužena v přímku.
3. Je-li dána úsečka, můžeme nakreslit kružnici, která má úsečku jako poloměr a jeden z krajních bodů jako střed.
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Bodem, který neleží na dané přímce, je možné s touto přímkou vést právě jednu rovnoběžku.

Dodatek: Pátý postulát je v Euklidových Základech formulován jinak, ale bývá často nahrazován tímto ekvivalentním výrokem, který je jednodušší.

Dva tisíce let se matematici snažili dokázat pátý postulát z předchozích čtyř a nikomu se to nepovedlo. Dnes víme, že dokázat jej z předchozích tvrzení není možné. Jeho nahrazením totiž získáme jiné druhy geometrií. Pokud jej použijeme získáme geometrii v klasické rovinné podobě.

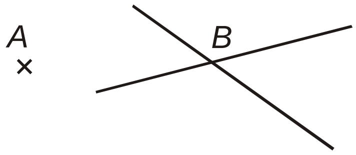
Velká část geometrických vět jsou „jasná" tvrzení známá z běžného života, často je obtížnější je dokázat. Proto začátek geometrie využijeme k nácviku samostudia.

Na následujících stránkách bude následovat přehled základních pojmů, používaných v geometrii. Většinou nevyžadují žádné pochopení, spíš jde o to si zapamatovat, co který pojem znamená.

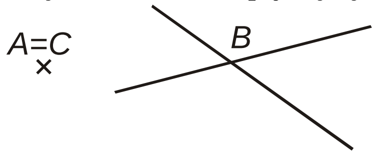
Protože řada pojmů je buď notorický známá nebo je samoobjasňující, není třeba se učit všechny uvedené pojmy. Zkuste si nejdřív pojem přečíst a sami si představit, co může znamenat a pokud je Vaše představa správná nemusíte se nic učit. Pokud se Vaše představa liší, stačí ji zkorigovat.

Bod

idealizace místa (nemá rozměr, nezabírá plochu), modelujeme jako průsečík dvou čar, značíme velkým písmenem



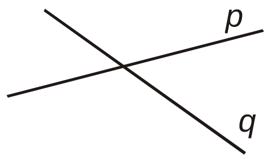
Dva body mohou „reprezentovat stejné místo“ $\Rightarrow$ splývají, jsou totožné $A = C$



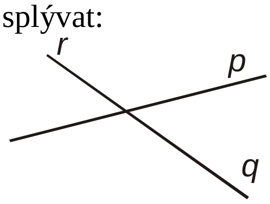
na obrázku platí také $A \neq B$

Přímka

idealizace nekonečné čáry (nemá tloušťku), modelujeme jako čáru, značíme malým písmenem



Podobně jako body mohou i přímky splývat:



$q = r$, $p \neq r$

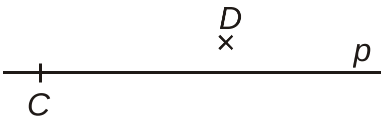
Vztahy mezi geometrickými útvary zapisujeme pomocí značek pro množinové operace

Platí: Dvěma různými body prochází jediná přímka.

$\Rightarrow$ přímku můžeme kromě jejího názvu zapisovat i pomocí těchto dvou bodů

$p = \overleftrightarrow{AB}$

Př. 1: Zapiš pomocí značek pro množinové operace vztah mezi body *C*, *D* a přímkou *p* na obrázku.



$C \in p$ - bod *C* leží na přímce *p*

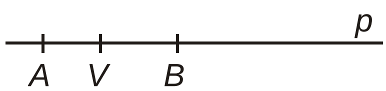
$D \notin p$ - bod *D* neleží na přímce

Pokud bod *C* leží na přímce *p* vzniká mezi ním a přímkou *p* vzájemný vztah („mají něco společného“) – říkáme, že **bod *C* je incidentní s přímkou *p*** (a přímka *p* je incidentní s bodem *C*).

Př. 2: Najdi důvod proč nemůžeme výraz „je incidentní“ nahradit výrazem „leží na“.

Výraz „leží na“ nepopisuje vzájemný vztah, protože přímka *p* nemůže ležet na bodu *C*.

Polopřímka

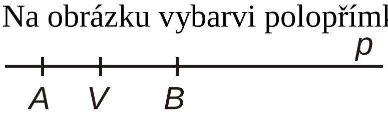


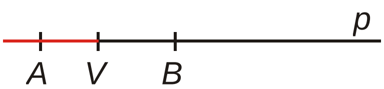
Bod *V* rozděluje přímku *p* na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společným počátkem.

Ostatní body přímky *p* náleží pouze jedné ze vzniklých polopřímek, jsou jejich vnitřními body.

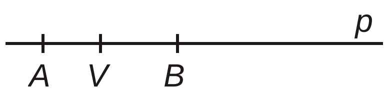
Polopřímka s počátkem *V* a vnitřním bodem *A* se značí $\mapsto VA$.

Př. 3: Na obrázku vybarvi polopřímku opačnou k polopřímce $\mapsto VB$.





Úsečka



Body na obrázku vytváření i další útvary, například úsečku *AB*.

Př. 4: Definuj úsečku *AB* jako množinu bodů s určitou vlastností.

Úsečka *AB* je množina bodů přímky *p*, které leží mezi body *A* a *B* a těchto dvou bodů.

Taková to definice je sice jasná z hlediska obyčejných lidí, ale není jasná z hlediska matematiky. Nevíme, co znamená „leží mezi body“. Proto je úsečka definována jako průnik (množina společných prvků) dvou polopřímek.

Př. 5: Definuj úsečku *AB* jako průnik dvou polopřímek.

Úsečka *AB* je průnik polopřímek *AV* a *BV* (píšeme $AB = \mapsto AV \cap \mapsto BV$)

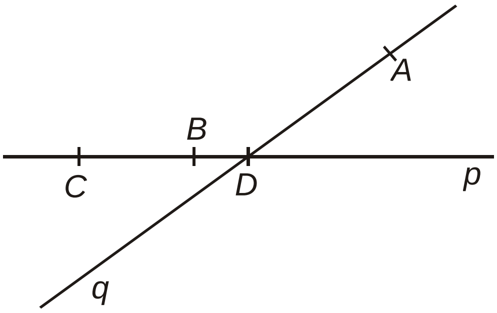
nebo
Úsečka AB je průnik polopřímek AB a BA (píšeme $AB = \mapsto AB \cap \mapsto BA$)

Druhá možnost je lepší, nevyžaduje další bod V.

Body A a B se nazývají **krajní body** úsečky AB.
Ostatní body úsečky jsou **vnitřní body** a dohromady tvoří **vnitřek úsečky** (jak překvapivé).

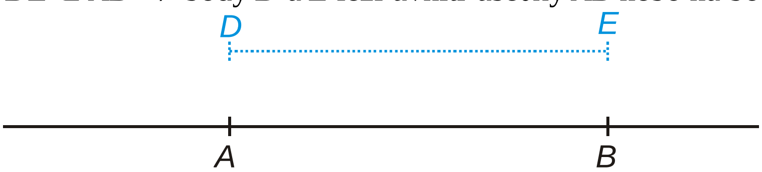
Př. 6: Nakresli do obrázku body a přímky tak, aby jejich polohy vyhovovaly následujícím zápisům: $A \notin p$; $CD \subset p$; $D = p \cap q$; $BD \subset \mapsto CD$, $\mapsto AD \subset q$

Bod A leží mimo přímku p na přímce q (aby polopřímka $\mapsto AD$ ležela na přímce q)
Body C a D leží na přímce p, bod D v jejím průsečíku s přímkou q. Bod B leží na polopřímce $\mapsto CD$)

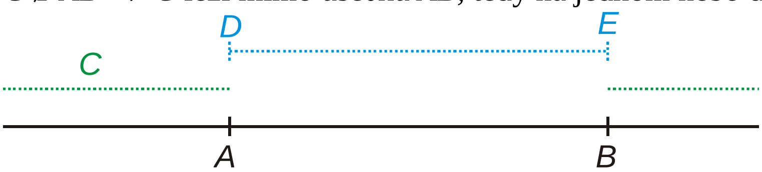


Př. 7: Na jedné přímce leží body A, B, C, D, E, F. Zakresli je obrázku tak, aby byly najednou splněny následující podmínky:
$DE \subset AB$; $C \notin AB$; $F \in \mapsto BA$; $\mapsto AF \cap DC = \emptyset$; $\mapsto BC \cap \mapsto ED = B$; $|AD| > 0$.

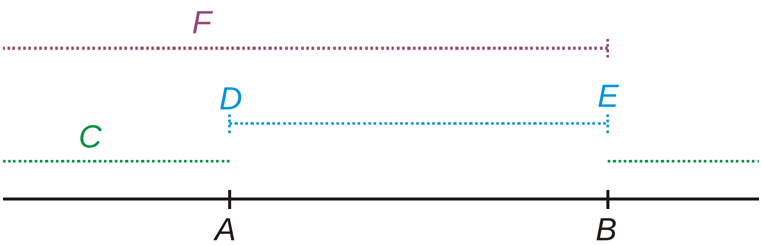
Budeme postupně procházet jednotlivé podmínky a zakreslovat možnou polohu bodů.
$DE \subset AB \Rightarrow$ body D a E leží uvnitř úsečky AB nebo na bodech A a B



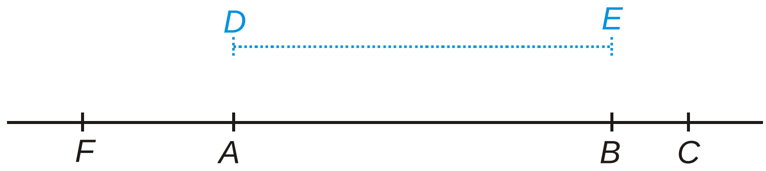
$C \notin AB \Rightarrow$ C leží mimo úsečku AB, tedy na jednom nebo druhém kraji



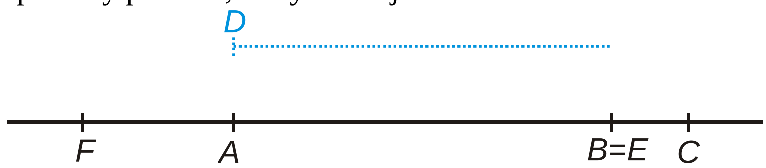
$F \in \mapsto BA; F \notin AB \Rightarrow$ bod F leží nalevo od bodu B nebo v něm



$\mapsto AF \cap DC = \emptyset \Rightarrow$ bod F musí ležet nalevo od bodu A, aby polopřímka AF směřovala doleva, bod D se nemůže shodovat s bodem A, možnost, že by body C i D ležely nalevo od bodu A je vyloučena první podmínkou, C tedy leží napravo od bodu B



$\mapsto BC \cap \mapsto ED = B \Rightarrow$ pokud mají dvě polopřímky společný právě jeden bod, musí mít společný počátek, body B a E jsou totožné



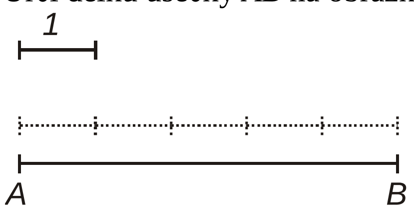
$|AD| > 0 \Rightarrow$ úsečka AD není nulová, body A a D nejsou totožné

Dodatek: Řešením by také byl stranově převrácený obrázek.

Délka

Délku úsečky AB (značíme $|AB|$) určíme porovnáváním s úsečkou, která má jednotkovou délku.

Př. 8: Urči délku úsečky AB na obrázku:



Délka úsečky AB je 5.

Píšeme $|AB| = 5$

Délka úsečky AB představuje vzdálenost bodů A a B.

Pokud platí $|AB| = a$, můžeme jako a označit i celou úsečku AB.

Pokud platí $A = B$ je délka úsečky rovna nule, úsečka AB se nazývá nulová.

Shodnost

Dva útvary považujeme za shodné pokud je můžeme ztotožnit přemístěním.

Př. 9: Rozhodni, kdy jsou shodné dvě přímky.

Každé dvě přímky jsou shodné.

Stejně tak jsou shodné každé dvě polopřímky.

Př. 10: Rozhodni, kdy jsou shodné dvě úsečky.

Dvě úsečky jsou shodné, když mají stejnou délku, píšeme $|AB| = |CD| \Leftrightarrow AB \cong CD$.

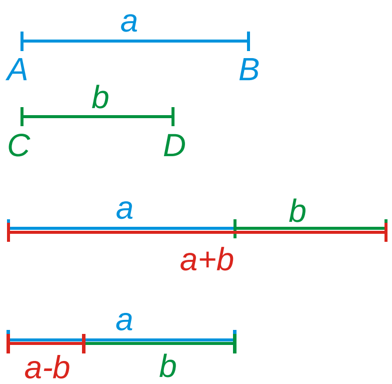
Je-li $|AB| > |CD|$, pak říkáme úsečka *AB* je větší než úsečka *CD*.
Je-li $|AB| < |CD|$, pak říkáme úsečka *AB* je menší než úsečka *CD*.

Úsečky je možné i sčítat a odčítat.

Př. 11: Zaveď sčítání a odčítání úseček doplněním vět.
Součtem úseček o délkách *a, b* je ….
Rozdílem úseček o délkách *a, b* $(a > b)$ je ….

Součtem úseček o délkách *a, b* je každá úsečka o délce $a + b$.
Rozdílem úseček o délkách *a, b* $(a > b)$ je každá úsečka o délce $a - b$.

Př. 12: Jsou dány dvě úsečky *AB* a *CD* $|AB| = a$, $|CD| = b$. Sestroj graficky úsečky $a + b$, $a - b$.



Shrnutí: