

3.1.1 Přímka a její části

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Úvod do geometrie patří z hlediska výuky mezi nejproblematictější části středoškolské matematiky. Několik prvních hodin obsahuje opakování pojmů a poznatků ze základní školy nebo soupisy termínů. Pro studenty jsou takové hodiny velmi nudné a ve skutečnosti vůbec nepotřebují pomoc učitele, protože tyto hodiny prakticky neobsahují látku, která vyžaduje nějaké pochopení. Proto jsem se rozhodl tyto hodiny zařadit jako nácvik samostudia. Studenti si tyto hodiny (kromě úvodního povídání) přečtou sami, udělají si slovníček termínů, které si nepamatují. Tento slovníček pak mohou používat jak při hodinách, tak při písemkách. Slovníčky si kontrolují. Druhou kontrolou domácího samostudia je hodina, která obsahuje řešení příkladů, které na probrané učivo navazují a pak následuje speciální písemka.

Geometrie – původně věda o „měření Země“ (geo + metrein) \Rightarrow praktický význam u pozemků \Rightarrow vylepšování + abstrakce (žádný bod ve skutečnosti neexistuje, nic nemůže mít stejné vlastnosti jako přímka) \Rightarrow ve starověku (díky Řekům) nejvýznamnější a nejrozvinutější část matematiky (i kvůli neúspěchům s druhou odmocninou u čísel). Výsadní postavení ztratila až v 16. století. Nejzajímavější částí české středoškolské matematiky zůstává dodnes.

Kolem roku 300 př. n.l.: **Euklides – Základy** – první matematická učebnice v moderním smyslu slova, začíná u postulátů (výroky považované za pravdivé) a z nich vyvozuje a dokazuje tvrzení (věty)

Nebudeme to dělat po něm, ale všechno, co budeme probírat (i zbytek geometrie) vychází z pěti postulátů:

1. Každé dva body mohou být spojeny přímkou.
2. Každá úsečka může být nekonečně prodloužena v přímku.
3. Je-li dána úsečka, můžeme nakreslit kružnici, která má úsečku jako poloměr a jeden z krajních bodů jako střed.
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Bodem, který neleží na dané přímce, je možné s touto přímkou vést právě jednu rovnoběžku.

Dodatek: Pátý postulát je v Euklidových Základech formulován jinak, ale bývá často nahrazován tímto ekvivalentním výrokem, který je jednodušší.

Dva tisíce let se matematici snažili dokázat pátý postulát z předchozích čtyř a nikomu se to nepovedlo. Dnes víme, že dokázat jej z předchozích tvrzení není možné. Jeho nahrazením totiž získáme jiné druhy geometrií. Pokud jej použijeme, získáme geometrii v klasické rovinné podobě.

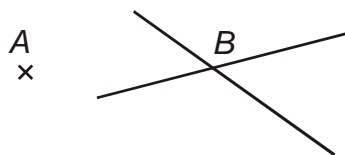
Velká část geometrických vět jsou „jasná“ tvrzení známá z běžného života, často je obtížnější je dokázat. Proto začátek geometrie využijeme k nácviku samostudia.

Na následujících stránkách bude následovat přehled základních pojmů používaných v geometrii. Většinou nevyžadují žádné pochopení, spíš jde o to si zapamatovat, co který pojem znamená.

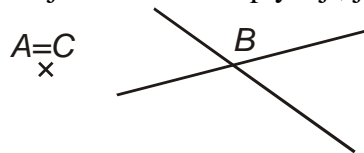
Protože řada pojmů je buď notoricky známá nebo je samoobjasňující, není třeba se učit všechny uvedené pojmy. Zkuste si nejdřív pojem přečíst a sami si představit, co může znamenat a pokud je Vaše představa správná, nemusíte se nic učit. Pokud se Vaše představa liší, stačí ji zkorigovat.

Bod

idealizace místa (nemá rozměr, nezabírá plochu), modelujeme jako průsečík dvou čar, značíme velkým písmenem



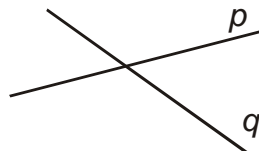
Dva body mohou „reprezentovat stejné místo“ \Rightarrow splývají, jsou totožné $A = C$



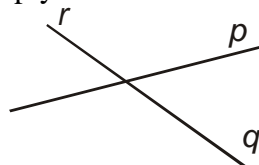
na obrázku platí také $A \neq B$

Přímka

idealizace nekonečné čáry (nemá tloušťku), modelujeme jako čáru, značíme malým písmenem



Podobně jako body mohou i přímky splývat:

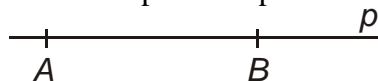


$q = r, p \neq r$

Vztahy mezi geometrickými útvary zapisujeme pomocí značek pro množinové operace

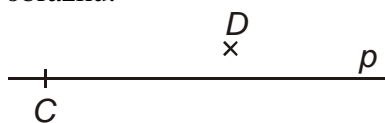
Platí: Dvěma různými body prochází jediná přímka.

\Rightarrow přímku můžeme kromě jejího názvu zapisovat i pomocí těchto dvou bodů



$p \Leftrightarrow AB$

Př. 1: Zapiš pomocí značek pro množinové operace vztah mezi body C, D a přímkou p na obrázku.



$C \in p$ - bod C leží na přímce p

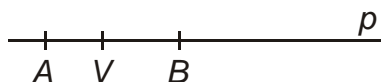
$D \notin p$ - bod D neleží na přímce

Pokud bod C leží na přímce p , vzniká mezi ním a přímkou p vzájemný vztah („mají něco společného“) – říkáme, že **bod C je incidentní s přímkou p** (a přímka p je incidentní s bodem C).

Př. 2: Najdi důvod, proč nemůžeme výraz „je incidentní“ nahradit výrazem „leží na“.

Výraz „leží na“ nepopisuje vzájemný vztah, protože přímka p nemůže ležet na bodu C .

Polopřímka

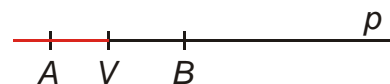
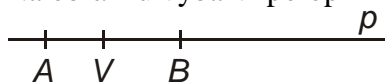


Bod V rozděluje přímku p na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společným počátkem.

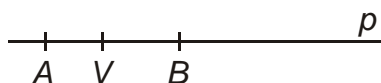
Ostatní body přímky p náleží pouze jedné ze vzniklých polopřímek, jsou jejich vnitřními body.

Polopřímka s počátkem V a vnitřním bodem A se značí $\mapsto VA$.

Př. 3: Na obrázku vybarvi polopřímku opačnou k polopřímce $\mapsto VB$.



Úsečka



Body na obrázku vytváří i další útvary, například úsečku AB .

Př. 4: Definuj úsečku AB jako množinu bodů s určitou vlastností.

Úsečka AB je množina bodů přímky p , které leží mezi body A a B a těchto dvou bodů.

Tato definice je sice jasná z hlediska obyčejných lidí, ale není jasná z hlediska matematiky. Nevíme, co znamená „leží mezi body“. Proto je úsečka definována jako průnik (množina společných prvků) dvou polopřímek.

Př. 5: Definuj úsečku AB jako průnik dvou polopřímek.

Úsečka AB je průnik polopřímek AV a BV (píšeme $AB \stackrel{=}{{\mapsto}} AV \cap \mapsto BV$)

nebo

Úsečka AB je průnik polopřímek AB a BA (píšeme $AB \Leftrightarrow AB \cap \rightarrow BA$)

Druhá možnost je lepší, nevyžaduje další bod V .

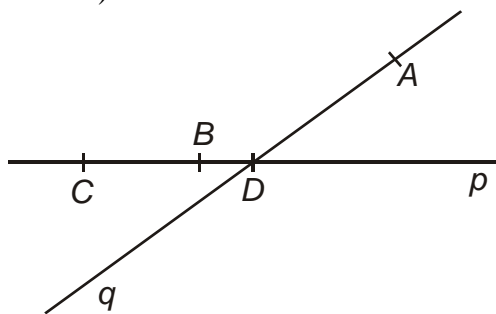
Body A a B se nazývají **krajní body** úsečky AB .

Ostatní body úsečky jsou **vnitřní body** a dohromady tvoří **vnitřek úsečky** (jak překvapivé).

Př. 6: Nakresli do obrázku body a přímky tak, aby jejich polohy vyhovovaly následujícím zápisům: $A \notin p$; $CD \subset p$; $D = p \cap q$; $BD \subset \rightarrow CD$, $\rightarrow AD \subset q$

Bod A leží mimo přímku p na přímce q (aby polopřímka $\rightarrow AD$ ležela na přímce q)

Body C a D leží na přímce p , bod D v jejím průsečíku s přímkou q . Bod B leží na polopřímce $\rightarrow CD$



Př. 7: Na jedné přímce leží body A, B, C, D, E, F . Zakresli je do obrázku tak, aby byly najednou splněny následující podmínky:

$DE \subset AB$; $C \notin AB$; $F \in \rightarrow BA$; $\rightarrow AF \cap \rightarrow DC = \emptyset$; $\rightarrow BC \cap \rightarrow ED = B$; $|AD| > 0$.

Budeme postupně procházet jednotlivé podmínky a zakreslovat možnou polohu bodů.

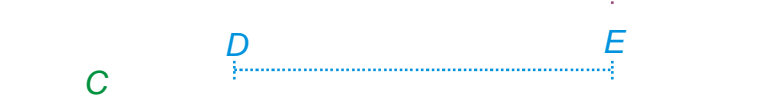
$DE \subset AB \Rightarrow$ body D a E leží uvnitř úsečky AB nebo na bodech A a B



$C \notin AB \Rightarrow C$ leží mimo úsečku AB , tedy na jednom nebo druhém kraji



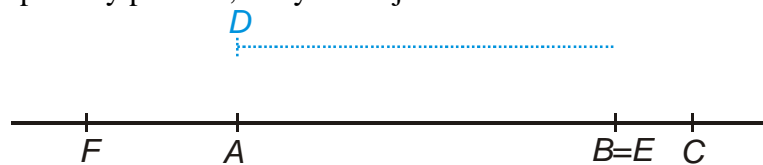
$F \in \rightarrow BA$; $F \notin AB \Rightarrow$ bod F leží nalevo od bodu B nebo v něm



$\rightarrow AF \cap \rightarrow DC = \emptyset \Rightarrow$ bod F musí ležet nalevo od bodu A , aby polopřímka AF směřovala doleva, bod D se nemůže shodovat s bodem A , možnost, že by body C i D ležely nalevo od bodu A , je vyloučena první podmínkou, C tedy leží napravo od bodu B



$\mapsto BC \cap ED = B \Rightarrow$ pokud mají dvě polopřímky společný právě jeden bod, musí mít společný počátek, body B a E jsou totožné



$|AD| > 0 \Rightarrow$ úsečka AD není nulová, body A a D nejsou totožné

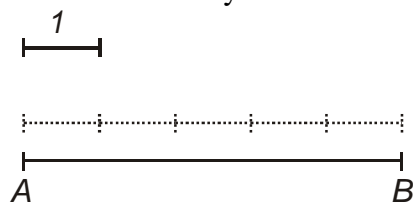


Dodatek: Řešením by také byl stranově převrácený obrázek.

Délka

Délku úsečky AB (značíme $|AB|$) určíme porovnáváním s úsečkou, která má jednotkovou délku.

Př. 8: Urči délku úsečky AB na obrázku:



Délka úsečky AB je 5.

Píšeme $|AB| = 5$

Délka úsečky AB představuje vzdálenost bodů A a B .

Pokud platí $|AB| = a$, můžeme jako a označit i celou úsečku AB .

Pokud platí $A = B$, je délka úsečky rovna nule, úsečka AB se nazývá nulová.

Shodnost

Dva útvary považujeme za shodné, pokud je můžeme ztotožnit přemístěním.

Př. 9: Rozhodni, kdy jsou shodné dvě přímky.

Každé dvě přímky jsou shodné.

Stejně tak jsou shodné každé dvě polopřímky.

Př. 10: Rozhodni, kdy jsou shodné dvě úsečky.

Dvě úsečky jsou shodné, když mají stejnou délku, píšeme $|AB| = |CD| \Leftrightarrow AB \cong CD$.

Je-li $|AB| > |CD|$, pak říkáme úsečka AB je větší než úsečka CD .

Je-li $|AB| < |CD|$, pak říkáme úsečka AB je menší než úsečka CD .

Úsečky je možné i sčítat a odčítat.

Př. 11: Zaved' sčítání a odčítání úseček doplněním vět.

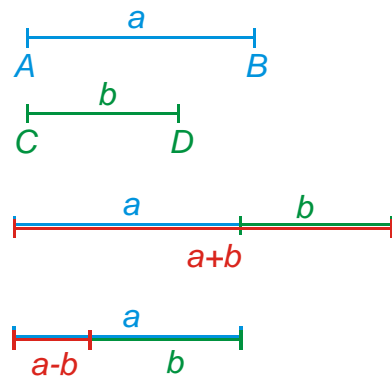
Součtem úseček o délkách a, b je

Rozdílem úseček o délkách a, b ($a > b$) je

Součtem úseček o délkách a, b je každá úsečka o délce $a + b$.

Rozdílem úseček o délkách a, b ($a > b$) je každá úsečka o délce $a - b$.

Př. 12: Jsou dány dvě úsečky AB a CD $|AB| = a$, $|CD| = b$. Sestroj graficky úsečky $a + b$,
 $a - b$.



Shrnutí: