3.2.1 Shodnost trojúhelníků I

Předpoklady: 3108

Dva útvary jsou shodné, pokud je možné je přemístěním ztotožnit.
$\Rightarrow$ v praxi těžko proveditelné $\Rightarrow$ hledáme jinou možnost ověření shodnosti

Dva útvary jsou shodné, pokud se všechny odpovídající si vzdálenosti shodují.
problémy:

- musíme dát pozor, který bod patří ke kterému
- musíme zkontrolovat nekonečně mnoho dvojic vzdáleností

$\Rightarrow$ vznikají pravidla pro konkrétní útvary

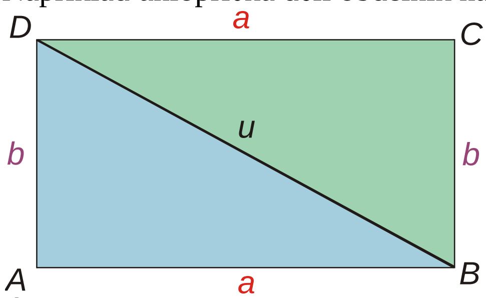
Shodnost trojúhelníků
píšeme $ABC \cong KLM$ (bod *A* odpovídá bodu *K*, bod *B* odpovídá bodu *L*, bod *C* odpovídá bodu *M*)

Věty o shodnosti trojúhelníků

- **Věta sss:** Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.
- **Věta sus:** Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.
- **Věta usu:** Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně jsou shodné.

$\Rightarrow$ věty o shodnosti jsou zároveň i věty o jednoznačném sestrojení trojúhelníka $\Rightarrow$ pokud se dva trojúhelníky dají sestrojit ze stejných hodnot a postup jejich sestrojování je jednoznačný, musí být shodné $\Rightarrow$ ke každému jednoznačnému postupu odpovídá jedna věta o shodnosti

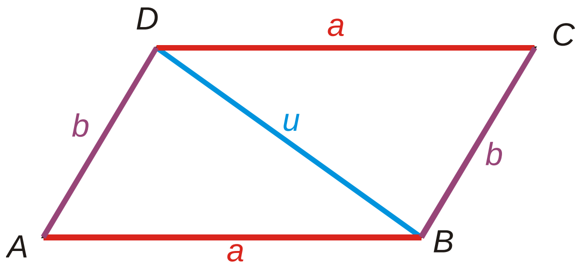
Jak se pomocí předchozích vět dokazuje shodnost dvou trojúhelníků?
Například úhlopříčka dělí obdélník na dva stejné trojúhelníky. Proč?



Úhlopříčka rozděluje obdélník na dva trojúhelníky – označíme si je modře a zeleně. Protilehlé strany obdélníka jsou stejné $\Rightarrow$ oba trojúhelníky mají jednu stranu *a* a jednu stranu *b* (označené stejnou barvou), třetí stranu trojúhelníky sdílejí (úhlopříčka *u*) $\Rightarrow$ oba trojúhelníky mají strany *a*, *b*, *u* $\Rightarrow$ shodují se ve všech třech stranách $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***sss***.

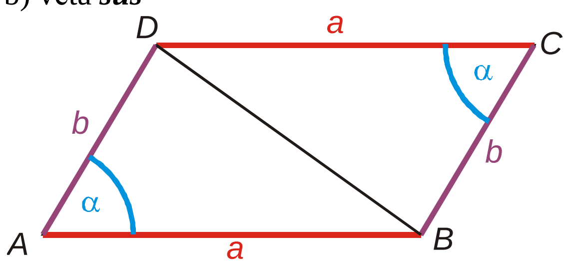
Př. 1: Dokaž pomocí každé z předchozích vět, že úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva stejné trojúhelníky. Při důkazech využij vlastnosti rovnoběžníka: protější strany jsou shodné a rovnoběžné, protější vnitřní úhly jsou shodné.

a) věta ***sss***



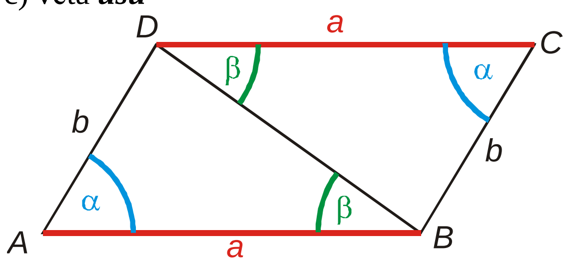
protější strany rovnoběžníka jsou shodné, oba trojúhelníky mají úhlopříčku jako společnou stranu $\Rightarrow$ oba trojúhelníky mají strany a, b, u $\Rightarrow$ shodují se ve všech třech stranách $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***sss***

b) věta ***sus***



protější strany rovnoběžníka jsou shodné, protější úhly v rovnoběžníku jsou shodné $\Rightarrow$ oba trojúhelníky mají strany a, b a úhel α $\Rightarrow$ shodují se ve dvou stranách a úhlu, který tyto strany svírají $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***sus***

c) věta ***usu***

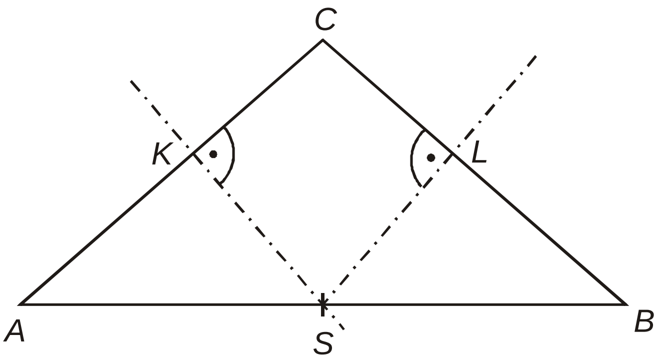


protější strany rovnoběžníka jsou shodné, protější úhly v rovnoběžníku jsou shodné, úhly, které svírá úhlopříčka s vodorovnými stranami jsou shodné (rovnoběžky proťaté příčkou) $\Rightarrow$ oba trojúhelníky mají shodnou stranu a a shodné úhly α, β, které k této straně přiléhají $\Rightarrow$ shodují se ve straně a přilehlých úhlech $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***usu***

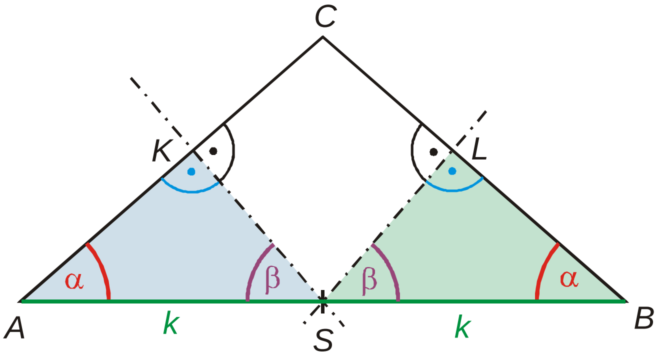
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě velmi jednoduchý, ale jde o záměr. S velkou pravděpodobností jde o první příklad tohoto typu, se kterým se studenti setkají.

Př. 2: Bod S je středem základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC. Bodem S jsou vedeny kolmice k ramenům AC a BC. Paty těchto kolmici označíme K, L. Dokaž, že trojúhelník ASK je shodný s trojúhelníkem BSL.

Nakreslíme si náčrtek situace:



Označíme si trojúhelníky a začneme hledat shodné strany nebo shodné úhly:



Oba trojúhelníky se shodují:

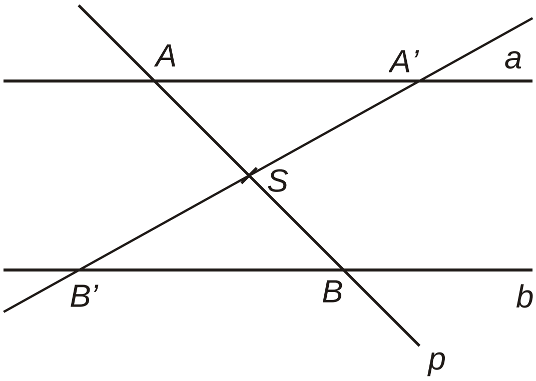
- v základné k (bod S je středem strany AB)
- v pravém úhlu při vrcholech K a L (jde o paty kolmic na ramena trojúhelníku ABC)
- v úhlech α při vrcholech A, B (trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB)
- v úhlech při vrcholu S (zbytek do $180°$)

oba trojúhelníky mají shodnou stranu k a shodné úhly α, β, které k této straně přiléhají $\Rightarrow$ shodují se ve straně a přilehlých úhlech $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***usu***

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je nutné studentům nechat udělat samostatně a pečlivě je kontrolovat. Značná část z nich příklad „dokáže“ podle věty ***usu***, ale se stranami *AK* a *BL*. Studenti totiž nevnímají požadavky na spolehlivost dostatečně striktně a vycházejí z rovnosti stran *AK* a *BL* bez toho, že by ji jakkoliv dokázali (nejčastěji to komentují slovy „je to přece jasný“). Je třeba trvat na tom, že shodnost stran musí být dokázána nebo přímo vycházet ze zadání (jako z něj vychází shodnost úseček *AS* a *BS*, která vyplývá ze zadané informace, že bod *S* je střed *AB*. Schopnost zjistit ze zadání o jaké informace se můžeme při řešení opírat je jednou z dovedností, které se dobře procvičují právě u geometrie.

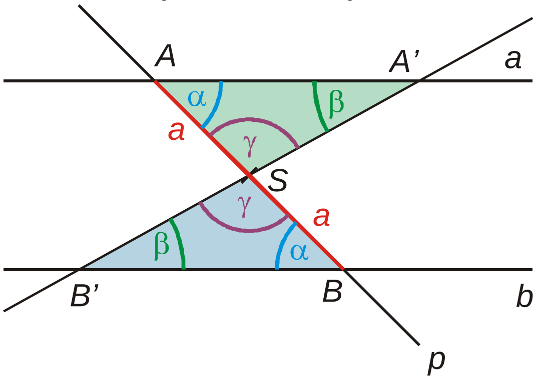
Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžky a, b. Přímka p je libovolná příčka těchto rovnoběžek, body A, B jsou její průsečíky s přímkami a, b a bod S je středem úsečky AB. Dokaž, že když sestrojíme pomocí libovolné přímky p' různoběžné s a a procházející bodem S body A' a B', bude bod S středem úsečky $A'B'$.

Nakreslíme si náčrtek situace:



Máme dokázat shodnost dvou stran $\Rightarrow$ zkusíme dokázat shodnost dvou trojúhelníku, které mají tyto strany $\Rightarrow$ pokud se budou trojúhelníky shodovat musí se shodovat i jejich odpovídající strany

Pokusíme se dokázat shodnost trojúhelníků $AA'S$ a $BB'S$. Hledáme v obou trojúhelnících shodné strany a shodné úhly:



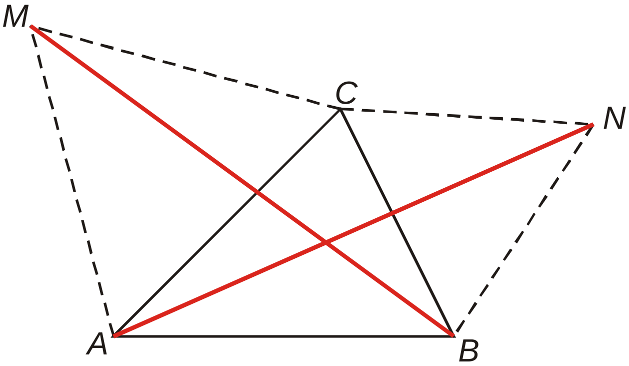
Oba trojúhelníky se shodují:

- v straně *a* (bod *S* je středem strany *AB*)
- v úhlu α při vrcholech *A* a *B* (rovnoběžky proťaté příčkou)
- v úhlech β při vrcholech A', B' (rovnoběžky proťaté příčkou)
- v úhlech γ při vrcholu *S* (zbytek do $180°$)

oba trojúhelníky mají shodnou stranu *a* a shodné úhly α, γ, které k této straně přiléhají $\Rightarrow$ shodují se ve straně a přilehlých úhlech $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***usu***

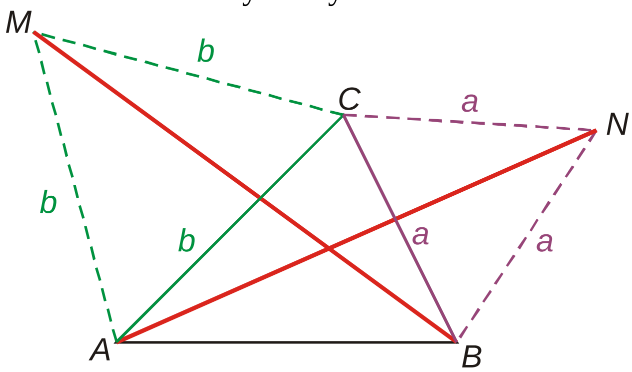
Př. 4: Je dán ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Nad stranami *BC* a *AC* jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky *BCN* a *ACM*. Dokaž, že platí $|BM| = |AN|$.

Nakreslíme si obrázek situace:

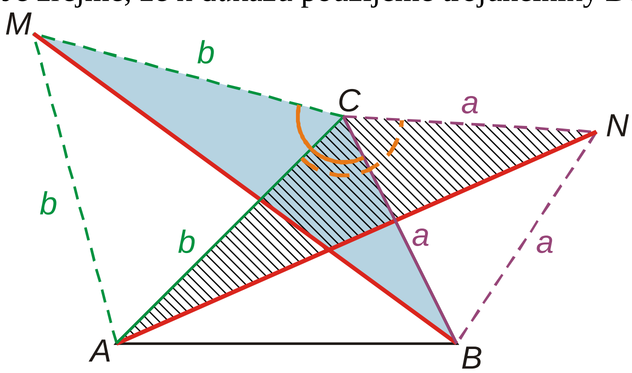


Musíme najít dva trojúhelníky, které obsahují strany *BM* a *AN* a jsou shodné.

Při důkazu budeme určitě využívat rovnostrannost trojúhelníků *BCN* a *ACM* $\Rightarrow$ vyznačíme si do obrázku všechny strany o délce *a* a *b*:



Je zřejmé, že k důkazu použijeme trojúhelníky *BCM* a *ACN*:



Oba trojúhelníky se shodují:

- v straně *a* (strany *BC* a *CN*)
- v straně *b* (strany *CM* a *AC*)
- v úhlech δ při vrchol *C* (platí $\delta = \gamma + 60°$)

oba trojúhelníky mají dvě shodné strany *a* a shodný úhel stranami sevřený $\Rightarrow$ jsou shodné podle věty ***sus***

Př. 5: Petáková:
strana 86/cvičení 18
strana 86/cvičení 19

Shrnutí: Při důkazech musíme začít pouze od jistých informací.