

### 3.2.2 Shodnost trojúhelníků II

#### Předpoklady: 3201

Pokud mají trojúhelníky speciální vlastnosti, mohou se věty o shodnosti zjednodušit

**Př. 1:** Zformuluj věty o shodnosti:

- a) rovnoramenných trojúhelníků,                      b) rovnostranných trojúhelníků,  
c) pravouhlých trojúhelníků.

a) věty o shodnosti rovnoramenných trojúhelníků

**sss:** rovnoramenný trojúhelník má dvě strany (ramena) shodné  $\Rightarrow$  dva rovnoramenné trojúhelníky jsou shodné pokud se shodují ve dvou různých stranách

**sus:** stačí, když se trojúhelníky shodují v úhlu a straně

**usu:** stačí, když se trojúhelníky shodují v úhlu a straně (druhý úhel je buď stejný nebo zbytek do  $180^\circ$ )

b) věty o shodnosti rovnostranných trojúhelníků

**sss:** rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany shodné  $\Rightarrow$  dva rovnostranné trojúhelníky jsou shodné pokud se shodují v jedné straně

**sus:** shoda v jedné straně (vnitřní úhly všech rovnostranných trojúhelníků jsou vždy  $60^\circ$  a tak je shoda úhlů samozřejmá)

**usu:** shoda v jedné straně (vnitřní úhly všech rovnostranných trojúhelníků jsou vždy  $60^\circ$  a tak je shoda úhlů samozřejmá)

c) věty o shodnosti pravouhlých trojúhelníků

**sss:** pro strany pravouhlého trojúhelníka platí Pythagorova věta  $\Rightarrow$  dva pravouhlé trojúhelníky jsou shodné pokud se shodují ve dvou stranách (třetí je určena Pythagorovou větou)

**sus:** stačí, když se trojúhelníky shodují v nepravém úhlu a straně

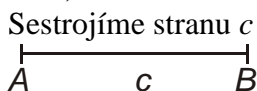
**usu:** stačí, když se trojúhelníky shodují v nepravém úhlu a straně (druhý úhel je buď stejný nebo zbytek do  $180^\circ$ )

Je nutné, aby ve větě **sus** u obecného trojúhelníku byl úhel sevřený stranami?

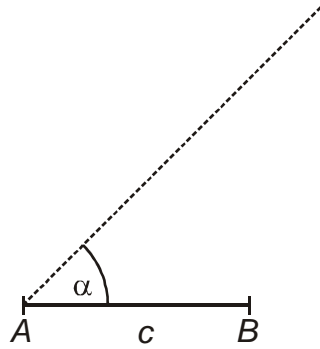
Věty o shodnosti odpovídají jednoznačným postupům při konstrukci trojúhelníka  $\Rightarrow$  zkusíme sestrojít trojúhelník podle věty **ssu** (strana, strana, úhel – tedy úhel proti jedné ze stran, ne úhel mezi nimi).

**Př. 2:** V trojúhelníku  $ABC$  jsou dány strany  $a$ ,  $c$  a úhel  $\alpha$ . Rozhodni zda, je tento trojúhelník zadán jednoznačně.

Budeme trojúhelník sestrojovat a sledovat, zda není někde více možností.

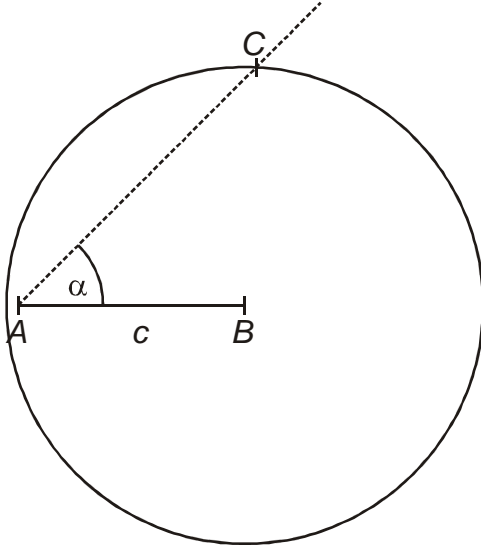


Sestrojíme úhel  $\alpha$



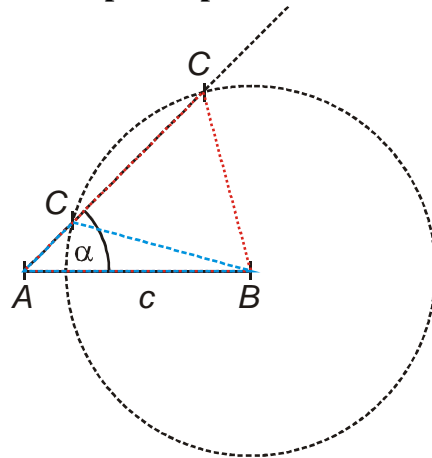
Hledáme vrchol  $C$  jako průsečík kružnice  $k(B; a)$  se šikmým ramenem úhlu  $\alpha$ .

**pokud platí  $a > c$**



Kružnice má s polopřímku jediný průsečík  
 $\Rightarrow$  jednoznačná konstrukce  $\Rightarrow$  věta o shodnosti **Ssu** (S – strana proti úhlu je větší).

**pokud platí  $a < c$**



Kružnice může mít s polopřímku dva průsečíky  $\Rightarrow$  dva různé trojúhelníky  $\Rightarrow$  není obecná věta o shodnosti ssu

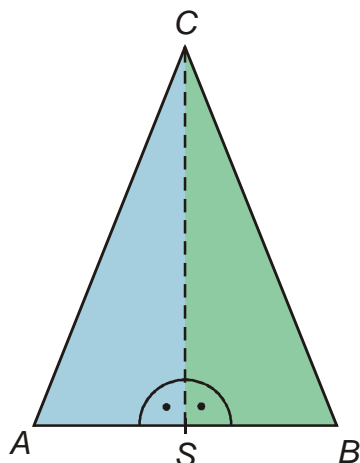
**Pedagogická poznámka:** Většina studentů kreslí pouze situaci pro  $a < c$  (je zajímavé, že si mnohdy nevšimnou, že má dvě řešení, protože místo celé kružnice nakreslí jenom bližší průsečík s polopřímku  $AC$ ). Když jim připomenete, že poloměr kružnice není znám a může se měnit alespoň část z nich jednoznačné řešení objeví.

**Věta Ssu:**

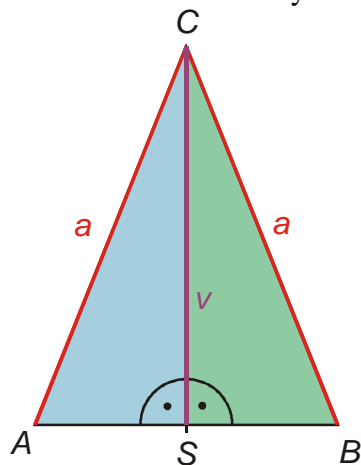
**Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.**

**Př. 3:** Dokaž, že výška na základnu dělí rovnoramenný trojúhelník na dvě shodné poloviny.

Patu výšky označíme  $S$ , vzniknou dva trojúhelníky:



Hledáme shodné strany a úhly trojúhelníků  $ASC$  a  $BSC$  :



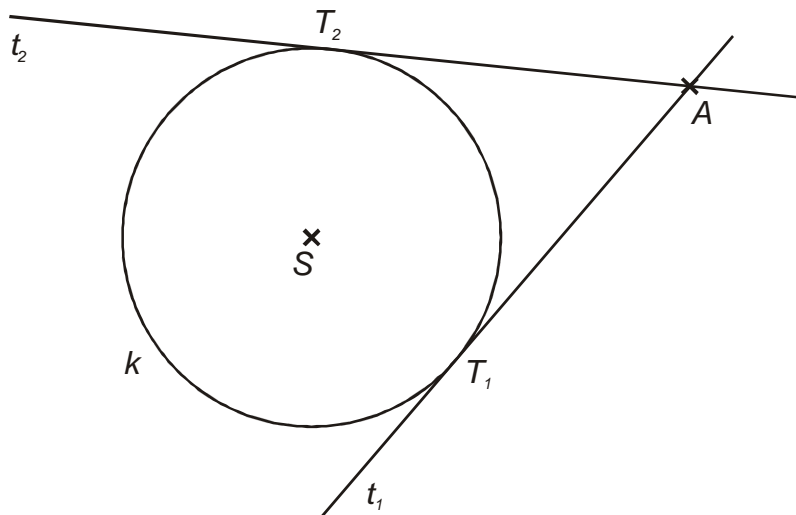
- shodné jsou strany  $AC$  a  $BC$  (ramena rovnoramenného s trojúhelníku).
- shodné jsou strany  $SC$ , protože jde o jednu a tu samou stranu
- shodné jsou úhly při vrcholu  $S$  (jsou pravé)

$\Rightarrow$  trojúhelníky  $ASC$  a  $BSC$  jsou shodné podle věty  $Ssu$ .

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako u příkladů v minulé hodině mají studenti tendenci vycházet z neověřených údajů. Konkrétně z rovnosti  $|AS| = |BS|$ , která z toho, že úsečka  $SC$  je výškou v trojúhelníku nijak nevyplývá (a vyplývá až z dokázané shodnosti trojúhelníků  $ASC$  a  $BSC$ ).

**Př. 4:** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $A$ , který leží vně kružnice  $k$ . Sestroj tečny kružnice  $k$  jdoucí z bodu  $A$ , tečné body označ  $T_1$  a  $T_2$ . Dokaž, že platí  $|AT_1| = |AT_2|$ .

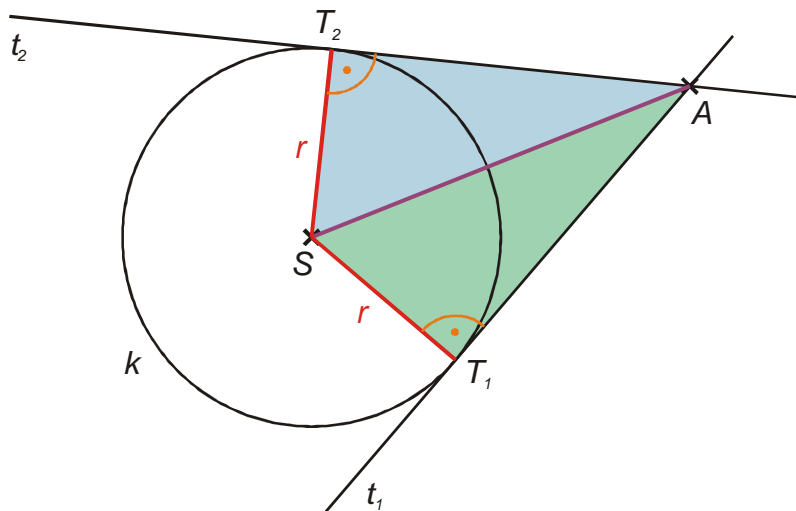
Nakreslíme obrázek:



Shodnost dvou úseček dokážeme pomocí shodnosti dvou trojúhelníků  $\Rightarrow$  hledáme dva trojúhelníky, které:

- obsahují úsečky  $AT_1, AT_2$
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici  $k$

$\Rightarrow$  zkusíme využít trojúhelníky  $AST_1$  a  $AST_2 \Rightarrow$  hledáme v čem se shodují.



Trojúhelníky  $AST_1$  a  $AST_2$  se shodují:

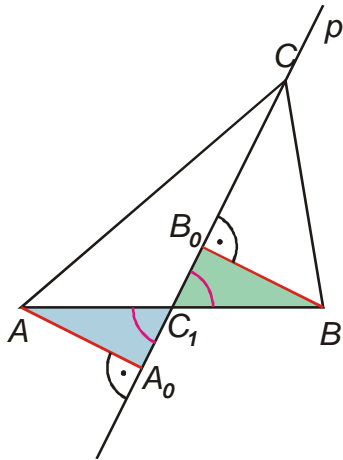
- ve straně  $AS$  (je společná obě trojúhelníkům)
- $ST_1 \cong ST_2$  (poloměry kružnice  $k$ )
- $\sphericalangle ST_1A \cong \sphericalangle ST_2A$  (pravé úhly, které svírá tečna kružnice s poloměrem)

$\Rightarrow AST_1 \cong AST_2$  (podle věty **Ssu** – úhly  $\sphericalangle ST_1A; \sphericalangle ST_2A$  jsou pravé a tedy největší v trojúhelnících  $\Rightarrow$  strana  $SA$  ležící proti nim musí být největší)

$\Rightarrow |AT_1| = |AT_2|$

**Pedagogická poznámka:** Největší problém předchozího příkladu je ve volbě trojúhelníků. Studenti nejčastěji volí trojúhelník  $AT_1T_2$ , který rozdělí výškou na dva. Slabina této volby spočívá právě v tom, že nijak nevyužívá fakt, že body  $T_1$  a  $T_2$  leží na kružnici.

**Př. 5:** Je dán trojúhelník  $ABC$ ,  $p$  je přímka, na níž leží těžnice  $t_C$  tohoto trojúhelníku. Dokaž, že body  $A, B$  mají od přímky  $p$  stejnou vzdálenost.



Vzdálenosti bodů  $A, B$  od přímky  $p$  jsou určeny pomocí kolmic k této přímce jako délky úseček  $|AA_0|$  a  $|BB_0|$ .

Hledáme shodné trojúhelníky, které obsahují tyto úsečky.

$\Rightarrow$  Možnost trojúhelníky  $AA_0C_1$  a  $BB_0C_1 \Rightarrow$  Snaha najít shodné velikosti nebo úhly:

- $AC_1 \cong BC_1$  (bod  $C_1$  je patou těžnice a tedy středem úsečky  $AB$ )
- $\sphericalangle AC_1A_0 \cong \sphericalangle BC_1B_0$  (úhly vrcholové)
- $\sphericalangle AA_0C_1 \cong \sphericalangle BB_0C_1$  (pravé úhly u pat kolmic)

$\Rightarrow$  shodná je i dvojice třetích úhlů (zbytek do  $180^\circ$ )  $\sphericalangle C_1AA_0 \cong \sphericalangle C_1BB_0$

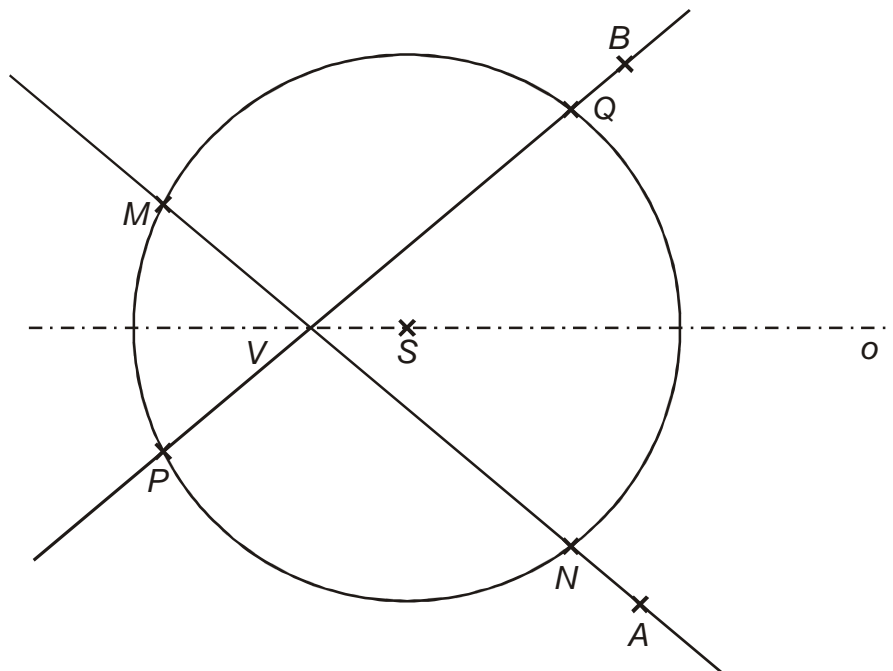
$\Rightarrow$  trojúhelníky jsou shodné podle věty *usu*

$\Rightarrow |AA_0| \cong |BB_0| \Rightarrow$  body  $A, B$  mají stejnou vzdálenost od přímky  $p$ .

**Pedagogická poznámka:** Hodně se vyřeší pokud studentům v pravý čas připomenete, že vzdálenost bodu od přímky se určuje pomocí kolmice. Mnozí mají pocit, že není co dokazovat, když bod  $C_1$  je středem úsečky  $AB$ .

**Př. 6:** Na ose  $o$  ostrého úhlu  $AVB$  sestroj uvnitř úhlu  $AVB$  bod  $S$ . Sestroj kružnici  $k(S; r)$  tak, a by platilo  $r > |VS|$ . Označ průsečíky přímky  $AV$  s kružnicí  $k$  jako  $M, N$  a průsečíky přímky  $BV$  s kružnicí  $k$  jako  $PQ$ . Dokaž, že platí  $|MN| = |PQ|$ .

Nakreslíme obrázek:



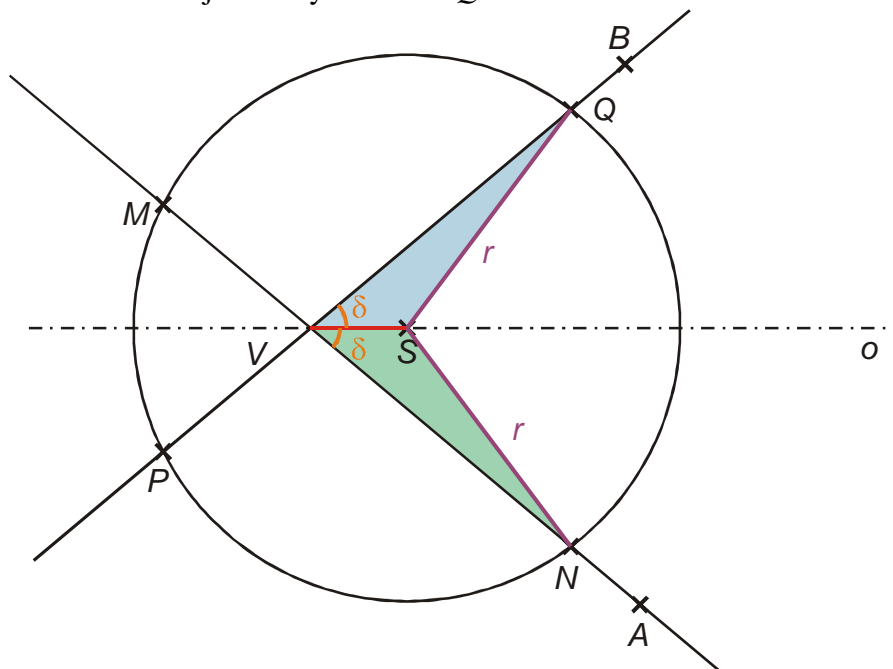
Rychle řešení není vidět, zkusíme příklad rozdělit na dva.

Nejdříve se pokusíme dokázat rovnost:  $|VQ| = |VN|$ .

Hledáme trojúhelníky s vlastnostmi, které jsme použili již v příkladu 4:

- obsahují úsečky  $VQ$  a  $VN$
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici  $k$  a osu  $o$

⇒ zkusíme trojúhelníky  $VSN$  a  $VSQ$ :



trojúhelníky se shodují:

- ve straně  $VS$  (je společná obě trojúhelníkům)
- $SN \cong SQ$  (poloměry kružnice  $k$ )
- $\sphericalangle SVN \cong \sphericalangle SVQ$  (shodných poloviny úhlu  $BVA$ )

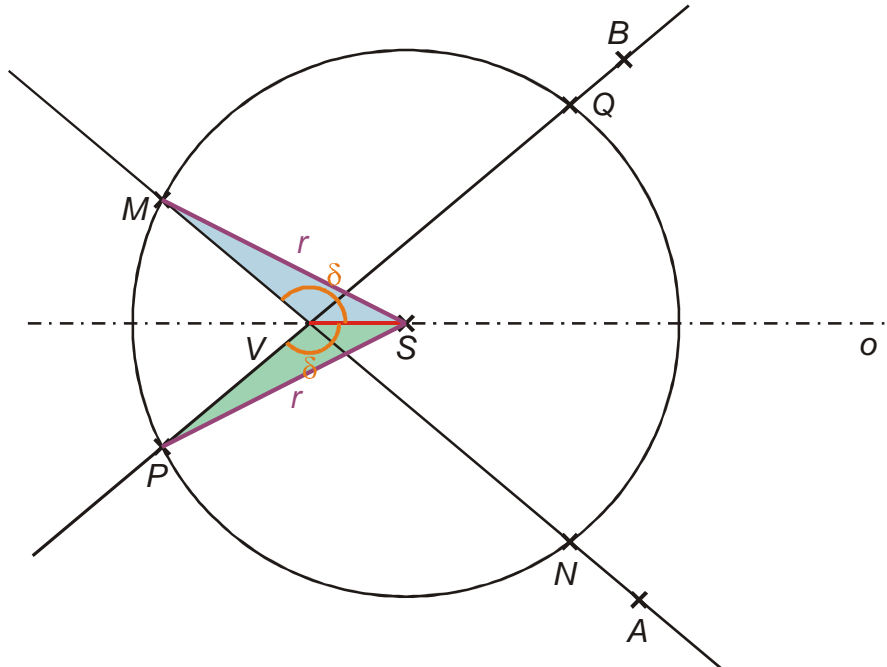
⇒ trojúhelníky jsou shodné podle věty *Ssu* ⇒ platí  $|VN| = |VQ|$

Nyní se pokusíme dokázat rovnost:  $|MV| = |PV|$ .

Hledáme trojúhelníky s vlastnostmi, které jsme použili již v příkladu 4:

- obsahují úsečky  $MV$  a  $PV$
- mají hodně společného
- využívají speciální rys zadání, tedy kružnici  $k$  a osu  $o$

⇒ zkusíme trojúhelníky  $MVS$  a  $PVS$ :



trojúhelníky se shodují:

- ve straně  $VS$  (je společná obě trojúhelníkům)
- $SM \cong SP$  (poloměry kružnice  $k$ )
- $\sphericalangle SVM \cong \sphericalangle SVP$  (součet shodných vrcholových úhlů a shodných polovin úhlu  $BVA$ )

⇒ trojúhelníky jsou shodné podle věty  $Ssu$  ⇒ platí  $|MV| = |PV|$

úsečky  $MN$  a  $PQ$  získáme sečtením dvou dvojic shodných úseček ⇒ platí  $|MN| = |PQ|$ .

**Př. 7:** Petáková:  
strana 86/cvičení 20

**Shrnutí:** Velké  $S$  ve jménu věty  $Ssu$  znamená, že strana proti úhlu musí být větší.