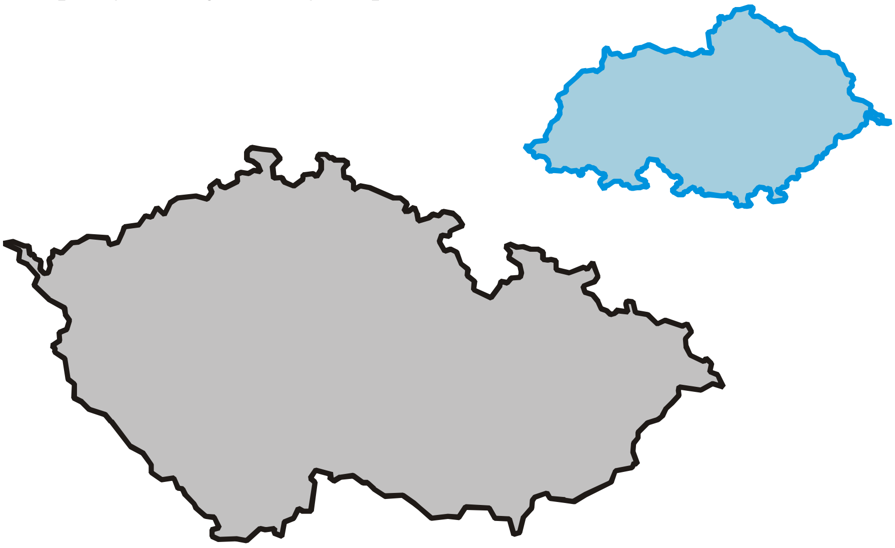
### 3.2.3 Podobnost trojúhelníků I

**Předpoklady:** 3201

Shodné útvary – je možné je přemístěním ztotožnit, lidově řečeno jsou „stejné“

Co splňují útvary, které jsou podobné?



Mají stejný tvar, ale různou velikost.
Kdybychom je chtěli ztotožnit, museli bychom je kromě přemístění i zvětšit (nebo zmenšit).

Kdy jsou podobné dvě úsečky?
**Vždy.** Všechny úsečky mají stejný tvar, liší se pouze velikostí $\Rightarrow$ vždy můžeme psát $|CD| = k|AB|$ ($k$ = koeficient podobnosti).

**Př. 1:** Urči koeficient podobnosti mezi úsečkami $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 9\,\text{cm}$.

Dosadíme do vztahu: $|CD| = k|AB| \;\Rightarrow\; k = \dfrac{|CD|}{|AB|} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.

Úsečka $|CD| = 9\,\text{cm}$ si je s úsečkou $|AB| = 6\,\text{cm}$ podobná s koeficientem $\dfrac{3}{2}$.

Kdy jsou si podobné dva trojúhelníky?
Jeden je zvětšení (nebo zmenšení) druhého $\Rightarrow$ všechny strany jednoho trojúhelníku jsou $k$ krát větší (nebo menší) než odpovídající strany druhého.

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku $ABC$, právě když existuje kladné číslo $k$ takové, že pro jejich strany platí:

$$|A'B'| = k|AB|,\ |A'C'| = k|AC|,\ |B'C'| = k|BC|$$

neboli $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$.

Názvosloví:

$A'B'C' \sim ABC$ (**na pořadí vrcholů záleží**) – trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku $ABC$,
$k$ = koeficient podobnosti trojúhelníků $A'B'C'$ a $ABC$,

- $k > 1$ - zvětšení,
- $k < 1$ - zmenšení,
- $k = 1$ - trojúhelníky jsou shodné.

**Př. 2:** Trojúhelník $A'B'C' \sim ABC$ s koeficientem podobnosti *k*. Urči koeficient podobnosti trojúhelníku $ABC$ s trojúhelníkem $A'B'C'$.

Platí: $|A'B'| = k|AB| \Rightarrow |AB| = \frac{1}{k}|A'B'|$

Trojúhelník $ABC$ je s trojúhelníkem $A'B'C'$ podobný s koeficientem $\frac{1}{k}$.

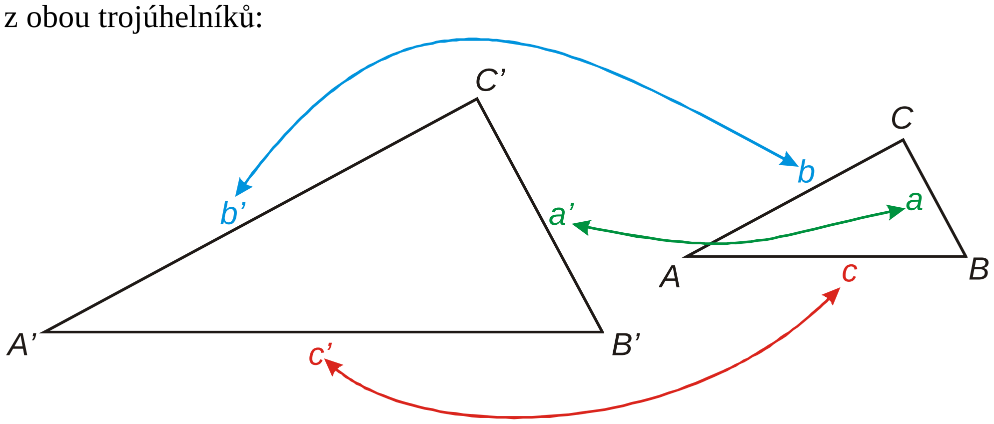
Dodatky:

- Podobnost je vzájemný vztah, je-li trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$ ($A'B'C' \sim ABC$) je i trojúhelník $ABC$ podobný trojúhelníku $A'B'C'$ ($ABC \sim A'B'C'$) $\Rightarrow$ pokud chceme zapsat samotný fakt podobnosti trojúhelníků na pořadí nezáleží (a v učebnici nebudeme žádné pořadí dodržovat).
- Pokud pracujeme s koeficientem podobnosti: "Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku $ABC$ s koeficientem $k = 3$ ..." na pořadí záleží, protože trojúhelník $ABC$ je s trojúhelníkem $A'B'C'$ podobný s koeficientem $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$. Proto v učebnici budeme dodržovat dohodu, že délky stran trojúhelníka, který je uveden jako první, získáme tak, že délky odpovídajících stran trojúhelníka, který je uveden jako druhý, vynásobíme uvedeným koeficientem *k*. Tato dohoda je dodržována i v nám známé literatuře.

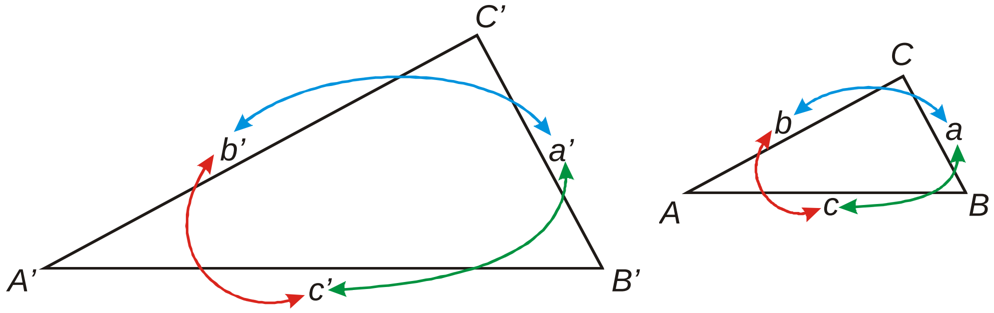
Podobnost trojúhelníků můžeme vnímat i jako shodu ve tvaru. Čím je určen tvar trojúhelníka?

- vnitřními úhly
- vzájemným poměrem stran

Vyjdeme z rovností: $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ $\Rightarrow$ $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k$ $\Rightarrow$ získáme tři rovnice:
$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$, $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ = v každém poměru, který vyjadřuje podobnost, vystupují strany z obou trojúhelníků:



Předchozí rovnosti můžeme upravit: $\frac{c'}{c}=\frac{b'}{b} \Rightarrow \frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$. Získáme tak jiné rovnosti: $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$, $\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}$, $\frac{c'}{a'}=\frac{c}{a}$ $\Rightarrow$ z poměrů mezi stranami různých trojúhelníků jsme získali poměry mezi stranami v jednom trojúhelníku




$\Rightarrow$ u jednoho z trojúhelníků nemusíme ani znát konkrétní délky stran, stačí jejich poměry a můžeme rozhodnout o podobnosti
nejčastěji zapisujeme v takto: $a':b':c'=a:b:c$

Věta o určení podobnosti trojúhelníků pomocí poměrů odpovídajících si stran je obdobou věty ***sss*** o shodnosti trojúhelníků.

**Př. 3:** Najdi odpovídající věty o podobnosti k větám o shodnosti ***sus, usu***.

Věta o shodnosti ***sus*** $\Rightarrow$ věta o podobnosti ***sus***: dva trojúhelníky se musí shodovat v poměrech dvou stran a v úhlu, který strany svírají (věta ***su*** nestačí, z první dvojice stran zjistíme koeficient podobnosti a teprve jeho dodržení druhou dvojicí stran nám říká něco o podobnosti).
Věta o shodnosti ***usu*** $\Rightarrow$ věta o podobnosti ***uu***: dva trojúhelníky se musí shodovat ve dvou úhlech (třetí úhel je zbytek do $180°$ a tím je jasná podobnost, protože dva trojúhelníky, které se shodují ve třech úhlech mají stejný tvar a tím pádem jsou si podobné).

**Pedagogická poznámka:** Zbytek hodiny tvoří příklady na ověřování a výpočtu z podobností. Zejména u ověřování podobnosti je rychlost postupu studentů velmi rozdílná. U pomalejších studentů je důležité, aby měl dost času si příklad spočítat samostatně a tak si problém rozmysleli.

**Př. 4:** Které z následujících trojúhelníků jsou podobné s trojúhelníkem $ABC$, kde $a=12$, $b=15$ a $c=18$
a) trojúhelník *KLM*: $k=12$, $l=10$, $m=8$
b) trojúhelník *XYZ* o stranách $28;24;36$
c) trojúhelník *EFG*: $|EF|=6$, $|EG|=4$, $|FG|=5$

V jednotlivých bodech si seřadíme strany podle velikosti a spočteme si poměry:
a) trojúhelník *KLM*: $k=12$, $l=10$, $m=8$
strany podle velikosti: $8;10;12$
$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ trojúhelníky $ABC$ a $MLK$ jsou si podobné (pořadí vrcholů je důležité, abychom věděli, které vrcholy si navzájem odpovídají)

b) trojúhelník *XYZ* o stranách $28;24;36$
strany podle velikosti: $24;28;36$
$\frac{24}{12}=2$, $\frac{28}{15}=1,8\overline{6}$ $\Rightarrow$ nemá cenu počítat dál $\Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *XYZ* si nejsou podobné

c) trojúhelník *EFG*: $|EF|=6$, $|EG|=4$, $|FG|=5$
strany podle velikosti: $4;5;6$
$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné
$|EF|=g\sim c$, $|EG|=f\sim a$, $|FG|=e\sim b$ $\Rightarrow$trojúhelníky *ABC* a *FEG* jsou si podobné (pořadí vrcholů je důležité, abychom věděli, které vrcholy si navzájem odpovídají)

**Př. 5:** Pro trojúhelníky platí $ABC\sim KLM$. Urči zbývající strany, pokud víme, že platí: $a=5$, $b=4$, $c=6$, $l=6$.

Nejdříve určíme koeficient podobnosti (označíme si ho *q*, aby se nám nepletl se stranou *k*):
$l=q\cdot b\Rightarrow q=\frac{l}{b}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
Teď můžeme dopočítat zbývající strany:
$k=q\cdot a=\frac{3}{2}\cdot 5=7,5$
$m=q\cdot c=\frac{3}{2}\cdot 6=9$
Strany trojúhelníka *KLM* mají délky $k=7,5$, $l=6$, $m=9$.

**Př. 6:** Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka *ABC* mají velikosti $47°$ a $56°$. Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka *KLM* mají velikosti $77°$ a $56°$. Jsou si trojúhelníky podobné?

Dopočítáme třetí úhel u jednoho trojúhelníků:
trojúhelník *ABC*: $180°-(47°+56°)=77°$ $\Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *KLM* se shodují ve dvou úhlech a jsou si podobné.

**Př. 7:** Pro poměr stran v trojúhelníku *ABC* platí $a:b:c=6:5:4$. Které z uvedených trojúhelníků jsou s ním podobné?
a) $30;25;15$ b) $8;10;12$ c) $18;20;24$

a) $30;25;15$
strany podle velikosti: $30;25;20$
kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:
$\frac{a}{b}=\frac{6}{5}=\frac{30}{25}$ $\Rightarrow$ platí $\frac{a}{c}=\frac{6}{4}\neq\frac{30}{15}=\frac{2}{1}$ $\Rightarrow$ neplatí $\Rightarrow$ trojúhelník není podobný s trojúhelníkem *ABC*
b) $8;10;12$
strany podle velikosti: $12;10;8$
kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:

$\frac{a}{b}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}\Rightarrow$ platí $\frac{a}{c}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}\Rightarrow$ platí $\frac{b}{c}=\frac{5}{4}=\frac{10}{8}\Rightarrow$ platí (bylo zřejmé dopředu) $\Rightarrow$ trojúhelník je podobný s trojúhelníkem *ABC*

c) $18;20;24$

strany podle velikosti: $24;20;18$

kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:

$\frac{a}{b}=\frac{6}{5}=\frac{24}{20}\Rightarrow$ platí $\frac{a}{c}=\frac{6}{4}\neq\frac{24}{18}=\frac{4}{3}\Rightarrow$ neplatí $\Rightarrow$ trojúhelník není podobný s trojúhelníkem *ABC*

**Př. 8:** Pro trojúhelníky platí $ABC \sim LKM$ s koeficientem podobnosti $q=3$. Urči zbývající strany obou trojúhelníků, pokud víme, že platí: $a=9$, $k=4$, $m=3$.

Známe koeficient podobnosti $\Rightarrow$ můžeme rovnou dopočítávat jednotlivé strany, ale musí dávat pozor, jak si strany odpovídají:

$a=q\cdot l\Rightarrow l=\frac{a}{q}=\frac{9}{3}=3$

$b=q\cdot k=3\cdot 4=12$

$c=q\cdot m=3\cdot 3=9$

Trojúhelník *ABC* má strany o velikosti $a=9$, $b=12$, $c=9$, trojúhelník *KLM* má strany o velikosti $k=4$, $l=3$, $m=3$.

**Př. 9:** Petáková:
strana 86/cvičení 21

**Shrnutí:** Podobné útvary mají stejný tvar, ale různou velikost.