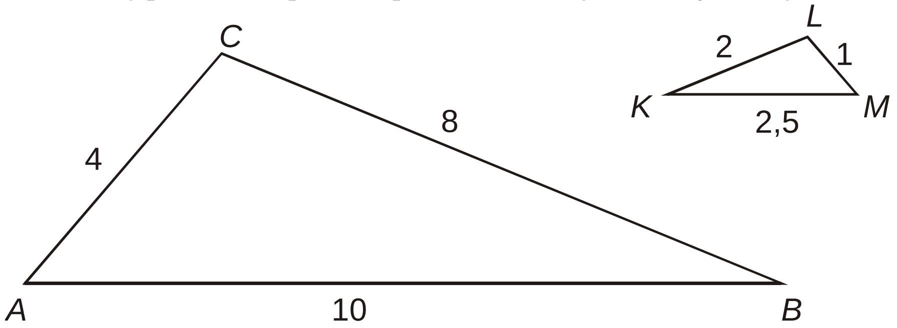
3.2.4 Podobnost trojúhelníků II

Předpoklady: 3203

Př. 1: Na obrázku jsou nakresleny podobné trojúhelníky. Zapiš jejich podobnost (aby bylo zřejmé, který vrchol prvního trojúhelníku odpovídá vrcholu druhého trojúhelníku).
Zkontroluj podobnost pomocí poměrů odpovídajících si stran mezi oběma trojúhelníky.
Zkontroluj podobnost pomocí poměrů uvnitř jednotlivých trojúhelníků.



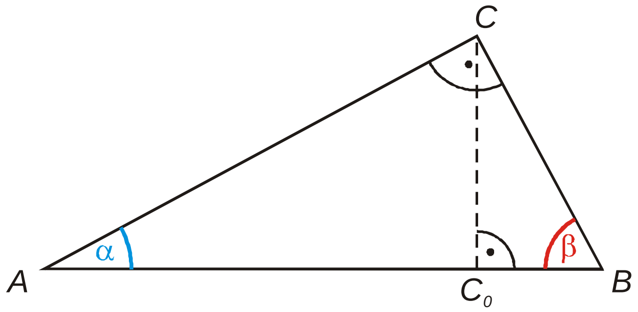
Seřadíme vrcholy trojúhelníku *KLM* ve stejném pořadí jako u trojúhelníku *ABC* (prostřední úhel, nejmenší úhel, největší úhel): $\triangle ACB \sim \triangle MKL$.
Ověření podobnosti pomocí poměrů odpovídajících si stran u obou trojúhelníků:
$$\frac{a}{m}=\frac{b}{k}=\frac{c}{l}=\frac{8}{2}=\frac{4}{1}=\frac{10}{2{,}5}.$$

Ověření podobnosti pomocí poměrů uvnitř jednotlivých trojúhelníků.

- $\dfrac{\textit{nejdelší strana}}{\textit{nejkratší strana}}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{l}{k} \Rightarrow \dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}=\dfrac{2{,}5}{1},$
- $\dfrac{\textit{nejdelší strana}}{\textit{prostřední strana}}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{l}{m} \Rightarrow \dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}=\dfrac{2{,}5}{2},$
- $\dfrac{\textit{prostřední strana}}{\textit{nejkratší strana}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{k} \Rightarrow \dfrac{8}{4}=\dfrac{2}{1}.$

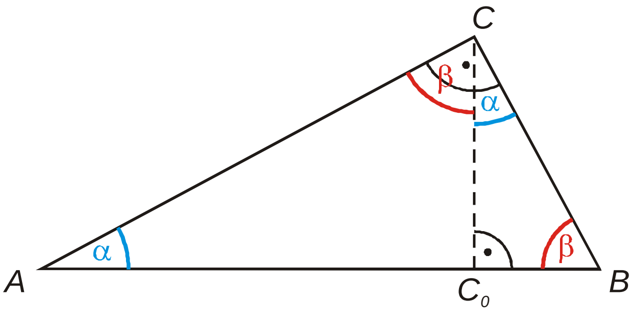
Př. 2: V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým uhlem při vrcholu *C* sestroj výšku na stranu *C*. Patu výšky označ C_0. Najdi podobné trojúhelníky.

Nakreslíme si obrázek:



Nemáme žádné informace o délce stran $\Rightarrow$ pokud se nám podaří dokázat podobnost, zřejmě pouze pomocí úhlů $\Rightarrow$ do obrázku doplníme ostatní úhly:
Pro součet úhlů v trojúhelníku *ABC* platí: $\alpha+\beta+90°=180° \Rightarrow \alpha+\beta=90° \Rightarrow$

- $\alpha=90°-\beta$
- $\beta=90°-\alpha$

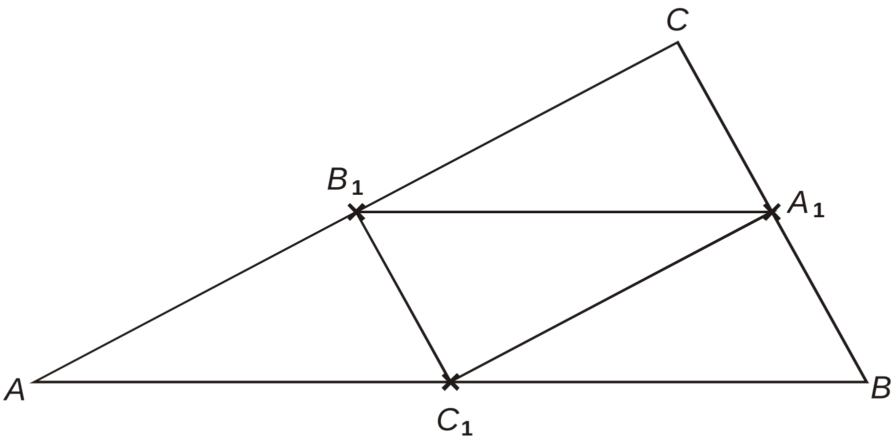


- Trojúhelník ACC_0 je pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C_0) $\Rightarrow$ pro úhel u vrcholu *C* musí platit: $180°=\alpha+\sphericalangle ACC_0+90° \Rightarrow \sphericalangle ACC_0=90°-\alpha=\beta \Rightarrow$ trojúhelník je podobný trojúhelníku *ABC* podle věty ***uu***.
- Trojúhelník BCC_0 je také pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C_0) $\Rightarrow$ pro úhel u vrcholu *C* musí platit: $180°=\beta+\sphericalangle BCC_0+90° \Rightarrow \sphericalangle BCC_0=90°-\beta=\alpha \Rightarrow$ trojúhelník je podobný trojúhelníku *ABC* podle věty ***uu***.

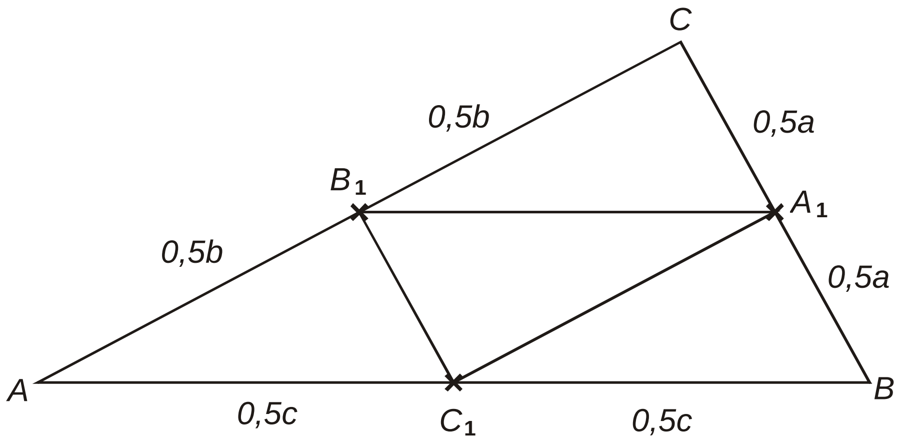
$\Rightarrow$ oba malé trojúhelníky jsou podobné trojúhelníku *ABC* a sobě navzájem $\Rightarrow$ zapíšeme podobnost (pořadí dodržujeme podle úhlů v pořadí $\alpha\beta 90°$) $\Rightarrow$
$ABC \sim ACC_0 \sim CBC_0$

Pedagogická poznámka: Je dobré zkontrolovat studenty a připomenout jim, že obrázek, který si kreslí, by jim měl pomáhat a proto by odvěsny trojúhelníka měly mít rozdílné délky, aby bylo ihned poznat, které strany u podobných trojúhelníků si odpovídají. Bavíme se o tomto problému jako o obecné radě do budoucna.

Př. 3: Střední příčky rozdělí trojúhelník *ABC* na čtyři menší trojúhelníky. Které z nich jsou podobné s původním trojúhelníkem *ABC*? Dokaž tyto podobnosti pouze na základě toho, že střední příčky spojují středy stran.



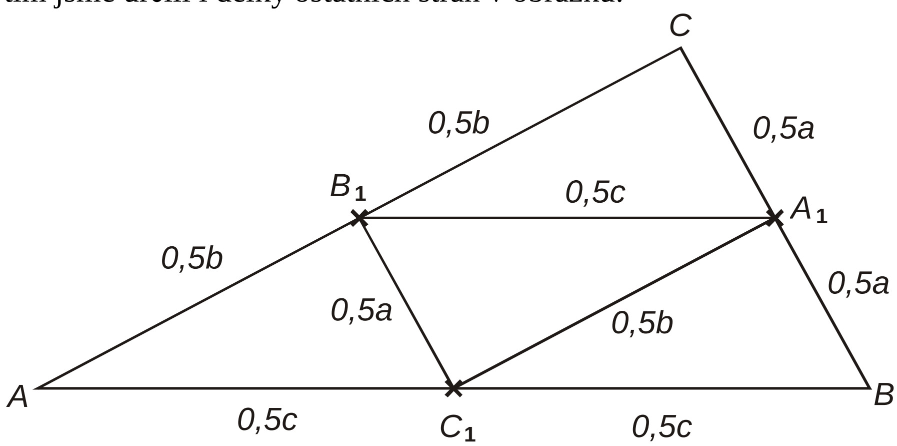
Dokreslíme do obrázku známé délky všech stran a velikosti známých úhlů:



z obrázku ihned vidíme:

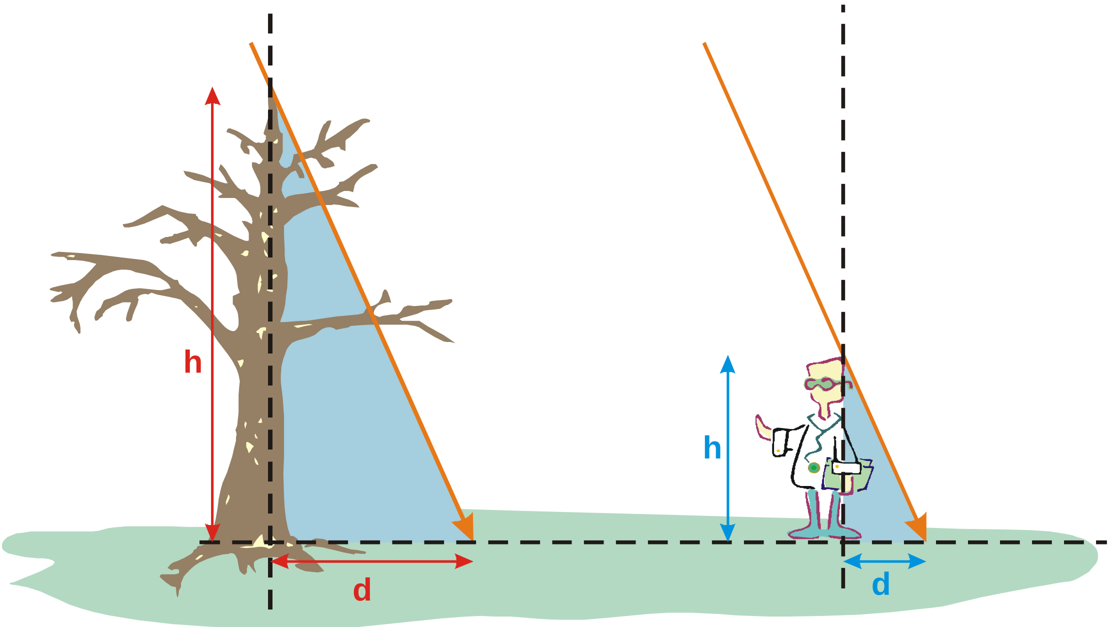
- $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$ podle věty ***sus***: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle CAB = \alpha$)
- $\triangle C_1A_1B \sim \triangle ABC$ podle věty ***sus***: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle CBA = \beta$)
- $\triangle B_1A_1C \sim \triangle ABC$ podle věty ***sus***: (vyznačené strany a stejný úhel $\sphericalangle ACB = \gamma$)

tím jsme určili i délky ostatních stran v obrázku:



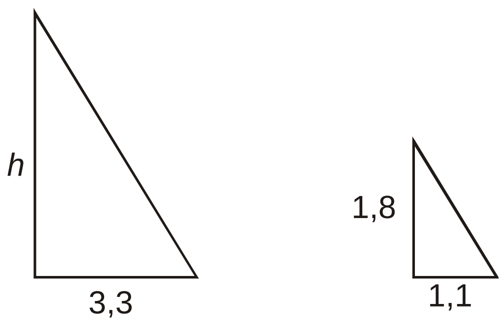
$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ podle věty ***sss***: (vyznačené strany)

Př. 4: Vymysli způsob, jak pomocí stínu měřit výšku předmětů.



Metoda je zřejmá z obrázku: v jednom okamžiku mají sluneční paprsky na jednom místě Země stejný směr. Sluneční paprsek tak spolu se svislicí a délkou stínu vytvoří podobné trojúhelníky $\Rightarrow$ pokud známe u jednoho předmětu jeho výšku a délku stínu, můžeme pomocí podobnosti spočítat výšku libovolného předmětu, u kterého změříme délku stínu ve stejném okamžiku.

Př. 5: Člověk vysoký 1,8 m vrhá stín o délce 1,1 m. Urči výšku stromu, jehož stín měl ve stejném okamžiku délku 3,3 m. Rovnici pro výpočet výšky stromu sestav:
a) na základě poměrů mezi odpovídajícími si stranami obou trojúhelníků,
b) na základě poměrů mezi stranami jednoho trojúhelníku.



a) na základě poměrů mezi odpovídajícími si stranami obou trojúhelníků

$$\frac{h}{1{,}8}=\frac{3{,}3}{1{,}1} \Rightarrow h=\frac{3{,}3}{1{,}1}\cdot 1{,}8\,\mathrm{m}=5{,}4\,\mathrm{m}$$

b) na základě poměrů mezi stranami jednoho trojúhelníka

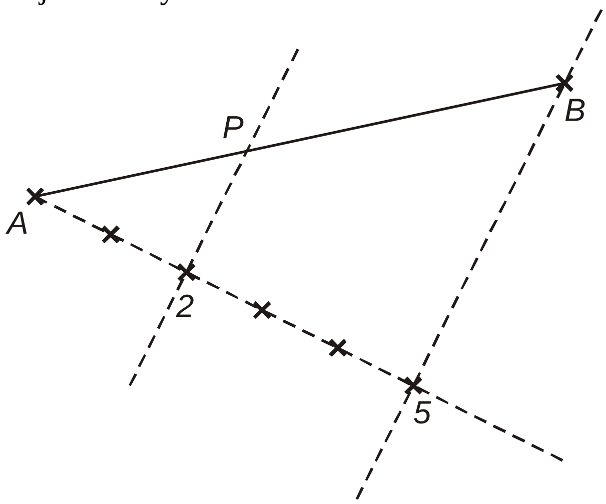
$$\frac{h}{3{,}3}=\frac{1{,}8}{1{,}1} \Rightarrow h=\frac{1{,}8}{1{,}1}\cdot 3{,}3\,\mathrm{m}=5{,}4\,\mathrm{m}$$

Strom je vysoký 5,4 m.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sice následující příklad na základní škole řešila, ale na postup si nevzpomene. Proto nemá cenu čekání příliš prodlužovat. Ukazuji jim oba způsoby, u obou většinou stačí, abych nakreslil na tabuli pomocnou polopřímku (polopřímky) a zbytek řešení studenti objeví sami.

Př. 6: Najdi způsob, jak bez použití měřítka rozdělit danou úsečku *AB* v poměru 2:3.

Nakreslíme libovolnou přímku procházející bodem *A* a vyznačíme na ní pět libovolných stejně dlouhých úseků.

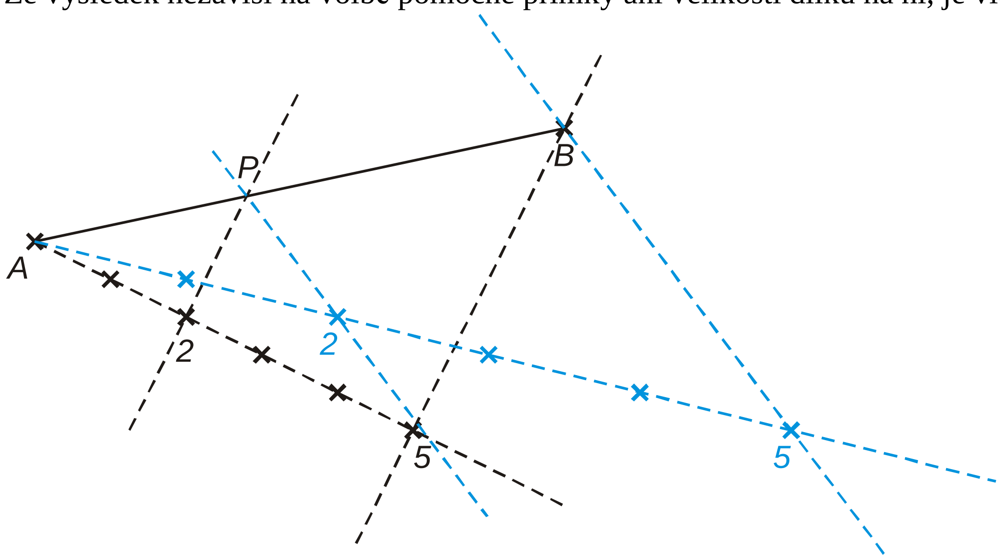


Pro rozdělení úsečky využijeme podobnost trojúhelníků:

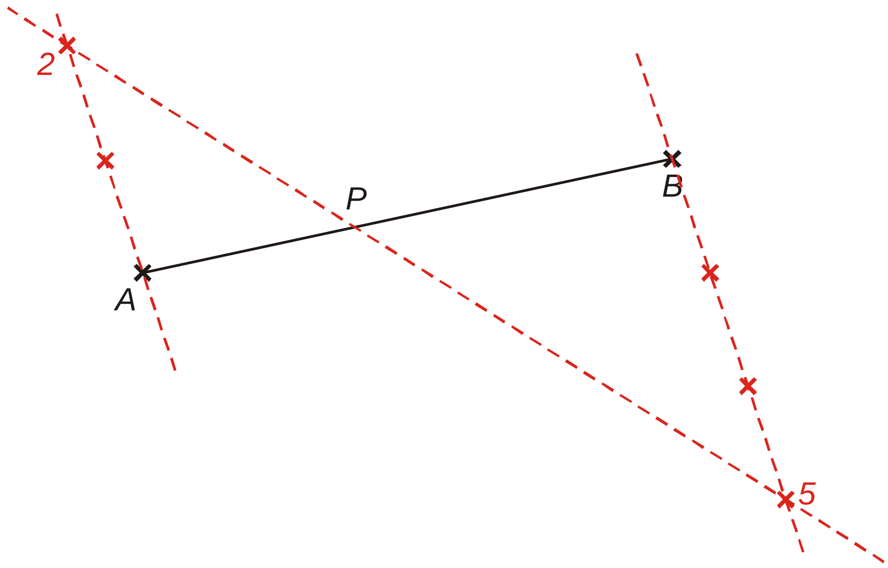
$\triangle A2P \sim \triangle A5B$ (podle věty ***uu***) v poměru $2:5$ (podle poměru stran $\frac{|A2|}{|A5|}$) $\Rightarrow |AP| = \frac{2}{5}|AB|$

$\Rightarrow |AP| = \frac{2}{3}|PB|$.

Že výsledek nezávisí na volbě pomocné přímky ani velikosti dílku na ní, je vidět z obrázku:

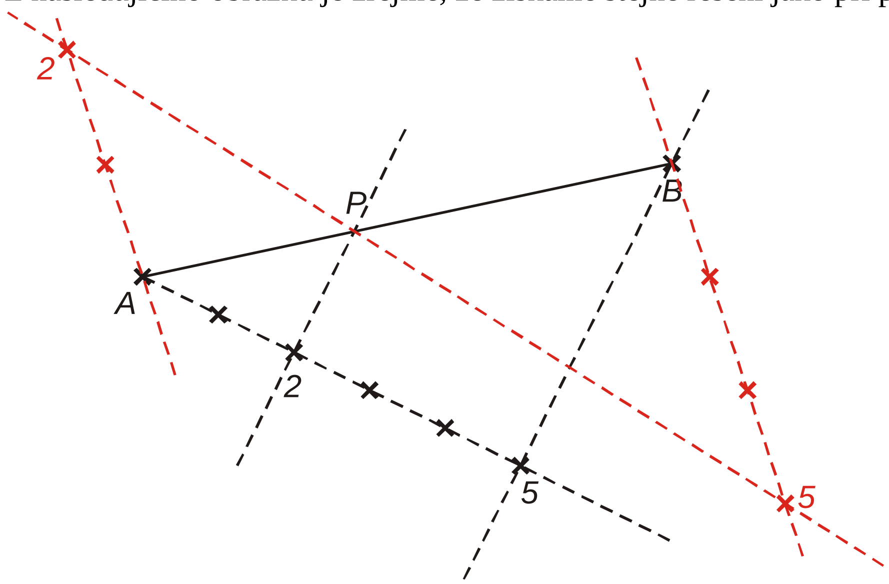


Využití podobnosti může být i ještě přímočařejší, když si pomocné přímky nakreslíme dvě (samozřejmě rovnoběžné):



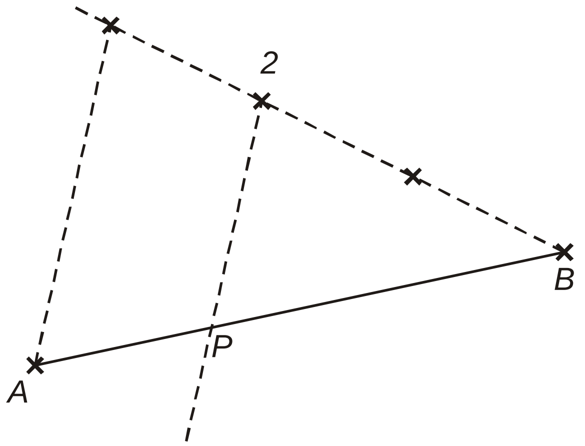
$\triangle A2P \sim \triangle B5B$ (podle věty ***uu***) v poměru $2:3$ (podle poměru stran $\frac{|A2|}{|B5|}$) $\Rightarrow$ $|AP| = \frac{2}{3}|PB|$.

Z následujícího obrázku je zřejmé, že získáme stejné řešení jako při použití první metody:



Př. 7: Načrtni rozdělení úsečky *AB* v poměru 1:2.

Poměr 1:2 $\Rightarrow$ dělíme úsečku na tři díly. Jinak postupujeme stejně jako v předchozím příkladu, pomocnou polopřímku povedeme pro změnu z bodu *B*.



Př. 8: Trojúhelníky *ABC* a *EFG* jsou si podobné s koeficientem podobnosti $k = 2$. Urči poměr jejich obsahů.

Trojúhelníky *ABC* a *EFG* jsou si podobné s koeficientem podobnosti $k = 2$ $\Rightarrow$ všechny vzdálenosti naměřené v trojúhelníku *EFG* jsou dvakrát větší než odpovídající vzdálenosti v trojúhelníku *ABC*.

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S_{EFG} = \frac{e \cdot v_e}{2} = \frac{2a \cdot 2v_a}{2} = 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4S_{ABC}$$

Obsah trojúhelníku *EFG* je čtyřikrát větší než obsah trojúhelníku *ABC*.

Stejný efekt známe z převodů jednotek. Platí například $1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm}$, ale $1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2$, protože $1\,\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm} \cdot 10\,\mathrm{dm} = 100\,\mathrm{dm}^2$.

Objem roste s třetí mocninou, a proto pokud se hrana krychle zvětší dvakrát, její objem se zvětší osmkrát.

Rychlý růst objemu s velikostí má mnoho důsledků. Například je důvodem, proč se mravenec při pádu z výšky na rozdíl od člověka nezabije, nebo proč vítr zdvihá písek, ale ne dlažební kostky (i když jde o stejný materiál).

Př. 9: Petáková:
strana 86/cvičení 23
strana 86/cvičení 25

Shrnutí: