

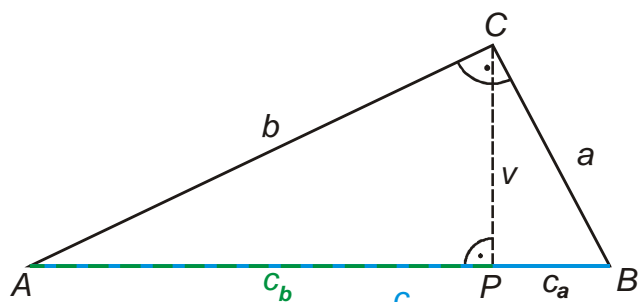
3.2.6 Pythagorova věta, Euklidovy věty II

Předpoklady: 3205

V každém pravouhlém trojúhelníku s odvěsnami a , b a přeponou c platí:
 $a = \sqrt{c \cdot c_a}$, $b = \sqrt{c \cdot c_b}$, $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, kde v je výška na přeponu a c_a , c_b jsou úseky přepony přilehlé ke stranám a , b .

Každou z předchozích vět je možné vyslovit i geometricky. Například věta o výšce
 $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$: **Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravouhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.**

Př. 1: Vypočítej zbývající prvky (a , b , c_a , v , α , β) v pravouhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$), je-li dáno: $c = 10$, $c_b = 6$.



$$b = \sqrt{c \cdot c_b} = \sqrt{10 \cdot 6} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$c = c_a + c_b \Rightarrow c_a = c - c_b = 10 - 6 = 4$$

$$a = \sqrt{c \cdot c_a} = \sqrt{10 \cdot (10 - 6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

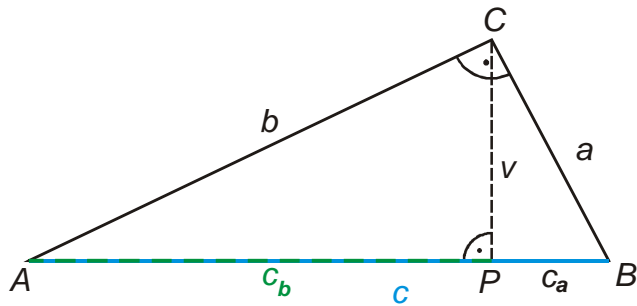
$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 39^\circ 14'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{15}}{10} \Rightarrow \beta = 50^\circ 46'$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu doporučuji studentům, aby si nakreslili obrázek a postupně do něj dopisovali údaje, které již znají. Tímto způsobem pak snáze přijdou na to, jak spočítat údaje, které zatím neznají.

Př. 2: Najdi způsob, jak zkontrolovat správnost výsledků předchozího příkladu.



Z obrázku vidíme: $c_a < c_b$, $a < b$, $\alpha < \beta$.

Součet úhlů v trojúhelníku musí být 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 39^\circ 14' + 50^\circ 46' + 90^\circ = 180^\circ$$

$$180^\circ = 180^\circ$$

Pro velikosti stran musí platit Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 10^2 = (2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{15})^2$$

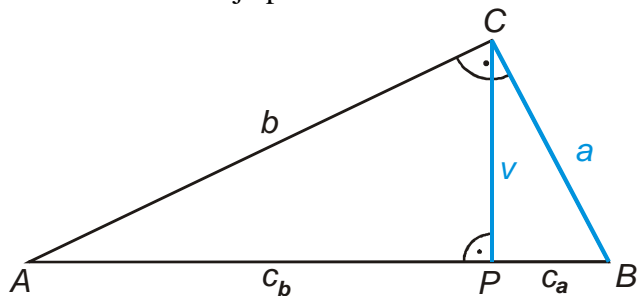
$$100 = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 15$$

$$100 = 100 \Rightarrow \text{platí.}$$

Pedagogická poznámka: Zdůrazňuji studentům, že při kreslení obrázku je dobré zachovat podstatné rysy (pravý úhel), přehánět rozdíly (velikosti c_b a c_a) a nepřidávat další vlastnosti (hodně studentů kreslí trojúhelníky zásadně pouze rovnoramenné). Z takto nakresleného obrázku je možné hodně vyčíst, jak je ukázáno v předchozím příkladě.

Př. 3: Vypočítej zbývající prvky (b , c , c_a , c_b , α , β) v pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$), je-li dáno: $a = 3$, $v = \sqrt{5}$. Goniometrické funkce používej pouze pro určování velikostí vnitřních úhlů.

Zadání neumožňuje přímé dosazení do žádného ze vzorců. Nakreslíme si obrázek:



Z pravoúhlého trojúhelníku CBP můžeme pomocí Pythagorovy věty spočítat úsek přepony c_a .

$$c_a^2 = a^2 - v^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 \Rightarrow c_a = 2$$

$$a^2 = c \cdot c_a \Rightarrow c = \frac{a^2}{c_a} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$c = c_a + c_b \Rightarrow c_b = c - c_a = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

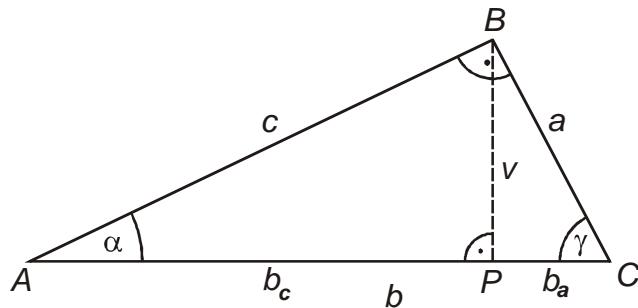
$$b = \sqrt{c \cdot c_b} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \alpha = 41^\circ 49'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \beta = 48^\circ 11'$$

Př. 4: V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $\beta = 90^\circ$. Načrtni obrázek tohoto trojúhelníku (včetně vyznačení výšky a úseků přepony) a zapiš pro tento trojúhelník Pythagorovu větu a Euklidovy věty. Zapiš vztahy pro goniometrické funkce úhlů α a γ .

Obrázek:



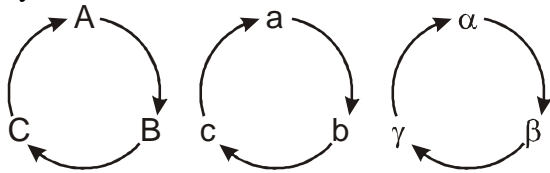
Pythagorova věta: $b^2 = a^2 + c^2$.

Euklidovy věty: $v = \sqrt{b_a \cdot b_c}$, $c = \sqrt{b \cdot b_c}$, $a = \sqrt{b \cdot b_a}$.

Goniometrické funkce: $\sin \alpha = \frac{a}{b}$, $\cos \alpha = \frac{c}{b}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{c}{a}$

$\sin \gamma = \frac{c}{b}$, $\cos \gamma = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{a}$, $\operatorname{cotg} \gamma = \frac{a}{c}$.

Dodatek: Změnu označení, ke které došlo v předchozím příkladu, popisují schémata pro cyklickou záměnu:



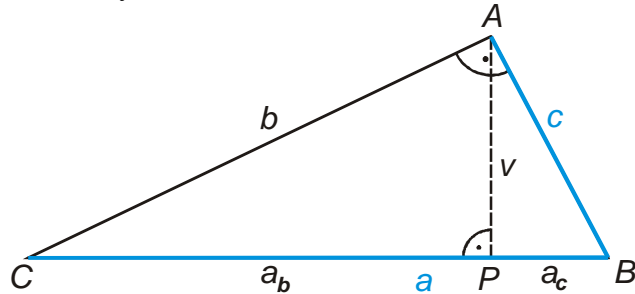
. V předchozím příkladu se z úhlu γ stal úhel $\beta \Rightarrow$ všechna označení stran, vrcholů i úhlů se posunula dvakrát ve směru šipek (například $a \rightarrow c$ nebo $\alpha \rightarrow \gamma$). Schémata umožňují provést záměnu zcela mechanicky, bezpečnější je však rozhodně nakreslení obrázku a vnímání vztahů jako vztahů mezi stranami trojúhelníka a ne mezi písmeny.

Pedagogická poznámka: Původně jsem začínal rovnou následujícím příkladem. Bohužel se ukázalo, že záměna značení není pro studenty vůbec snadnou záležitostí (setkávají se s ním zřejmě poprvé) a je nutné se nejdříve zabývat pouze jí.

Při diskusi nad příkladem je třeba trvat na tom, že všechny vzorce jsou vztahy mezi stranami trojúhelníka, nejde o vztahy mezi písmeny a tudíž je skoro jedno, jaká písmena si v konkrétním případě vybereme.

Př. 5: Vypočítej zbývající prvky (b , a_b , a_c , v , β , γ) v pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\alpha = 90^\circ$), je-li dáno: $c = \sqrt{6}$ cm, $a = 3$.

Pozor: nestandardní značení vrcholů \Rightarrow nakreslíme obrázek pro jednodušší zapsání zaměněných vzorců:



Spočteme úsek přepony:

$$c^2 = a \cdot a_c \Rightarrow a_c = \frac{c^2}{a} = \frac{(\sqrt{6})^2}{3} = 2$$

$$a = a_c + a_b \Rightarrow a_b = a - a_c = 3 - 2 = 1$$

$$b = \sqrt{a \cdot a_b} = \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$v = \sqrt{a_c \cdot a_b} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \gamma = 54^\circ 44'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 35^\circ 16'$$

Př. 6: Dokaž Pythagorovu větu pomocí Euklidových vět.

Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$

dosadíme: $a^2 = c_a \cdot c$, $b^2 = c_b \cdot c$

$$c^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$$

$$c^2 = c \cdot (c_a + c_b)$$

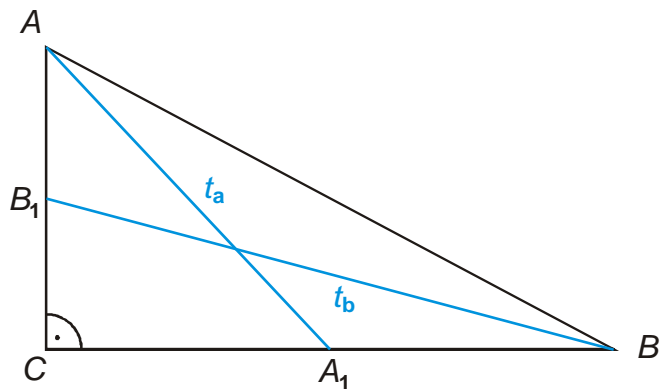
$$c^2 = c \cdot c = c^2$$

Uvedený postup můžeme i obrátit a dojít tak k Pythagorově větě \Rightarrow Pythagorova věta platí.

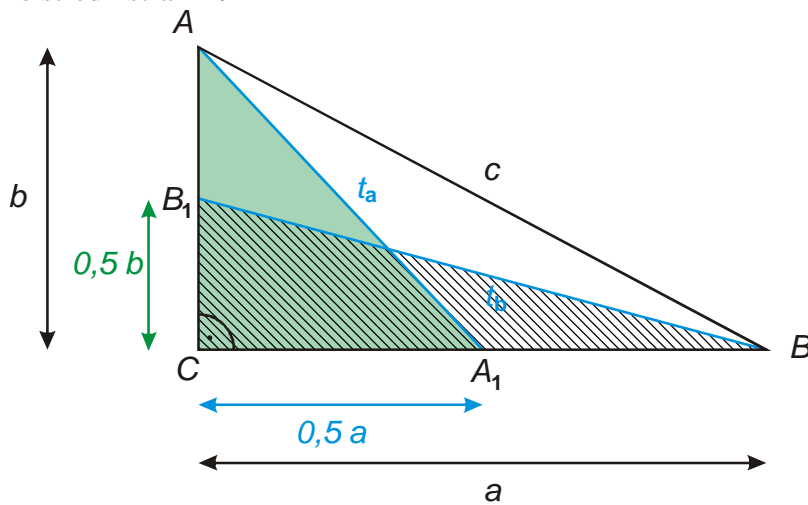
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad slouží k zabavení rychlejších studentů. Ti pomalejší ho přeskakují.

Př. 7: V pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) je dáno: $t_a = 4$, $t_b = \sqrt{19}$. Urči délky stran trojúhelníka.

Nakreslíme obrázek:



Hledáme trojúhelníky, u kterých známe dva údaje (a třetí můžeme zjistit), těžnice vycházejí ze středů stran \Rightarrow



Dvakrát můžeme využít Pythagorovu větu:

- trojúhelník CBB_1 : $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$,
- trojúhelník CAA_1 : $t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$,

\Rightarrow získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$(\sqrt{19})^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$4^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

Substitute: $a^2 = x$, $b^2 = y$

$$x + \frac{y}{4} = 19 \quad x + \frac{y}{4} = 19 \quad \Rightarrow y = 12$$

$$\frac{x}{4} + y = 16 \quad \frac{15}{4}y = 45$$

Dosadíme do první rovnice a vypočteme x :

$$x + \frac{12}{4} = 19 \Rightarrow x = 16$$

Návrat k původní proměnné:

$$a^2 = x = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$$

$$b^2 = y = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Určíme stranu } c: c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Trojúhelník ABC má strany o délkách $a = 4 \text{ cm}$, $b = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, $c = 2\sqrt{7} \text{ cm}$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu studenti většinou nejdříve zkouší spočítat příklad dělením těžnic na části. Hlavním problémem při řešení příkladu je pro studenty fakt, že sestavení jedné rovnice pro jeden z pravouhlých trojúhelníků jim neumožní cokoliv dopočítat. Musí mít obě rovnice najednou, ale většina z nich příklad vzdá ve chvíli, kdy zjistí, že použít jeden z trojúhelníků k vyřešení příkladu nestačí.

Př. 8: Petáková:
strana 87/cvičení 38
strana 87/cvičení 40
strana 87/cvičení 41 b) e)

Shrnutí: Euklidovy věty i Pythagorovu větu používáme i u pravouhlých trojúhelníků s jiným označením vrcholů. Nezáleží na písmenech ve vzorcích ale na jejich významu.