

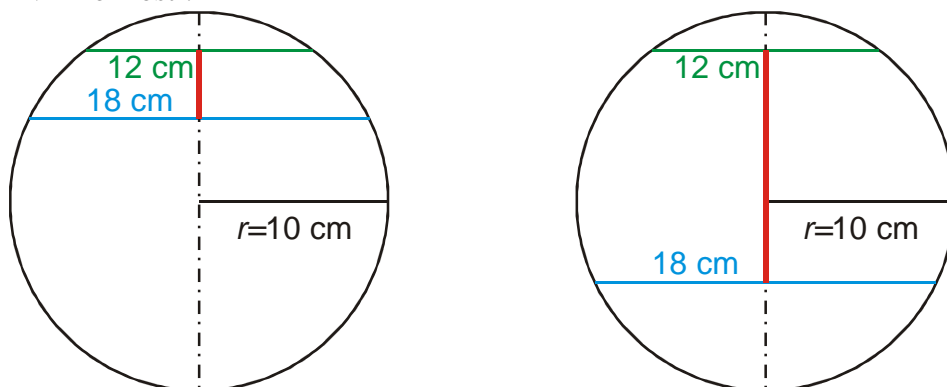
3.2.7 Příklady řešené pomocí vět pro trojúhelníky

Předpoklady: 3204, 3206

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů (a u mnoha dalších příkladů z geometrie) platí, že nedílnou součástí řešení je nápad (který se také nemusí dostavit). Proto v průběhu přemýšlení o příkladu postrkují třídu pomocí návodných otázek.

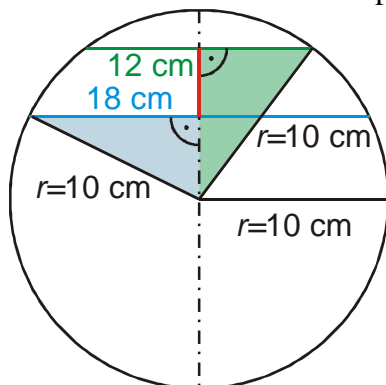
Př. 1: V kružnici o poloměru $r = 10$ cm urči vzdálenost dvou rovnoběžných tětiv o délkách 12 cm a 18 cm.

Dvě možnosti:



Budeme se zabývat prvním obrázkem (druhý dořešíme snadno).

V obrázku není nic, co by umožňovalo spočítat jakoukoliv vzdálenost. Musíme „dostat známé vzdálenosti k sobě“ nebo vytvořit trojúhelníky, je třeba využít vlastnosti kružnice \Rightarrow dokreslíme do obrázku další poloměry tak, aby končily u krajních bodů obou tětiv.



Vzdálenost obou tětiv získáme jako rozdíl délek odvěsen ve vyznačených pravoúhlých trojúhelnících s přeponou $r = 10$ cm.

Zelený trojúhelník (kratší tětiva): $a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

Modrý trojúhelník (delší tětiva): $a_2 = \sqrt{c_2^2 - b_2^2} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19}$

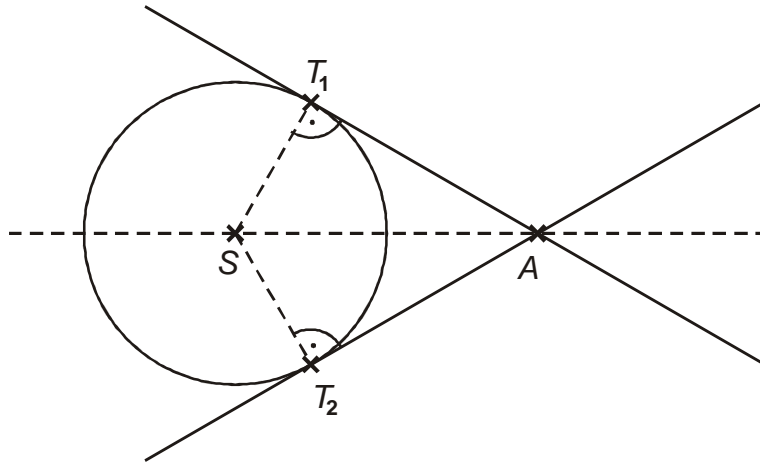
Vzdálenost obou tětiv:

- $d_1 = a_1 - a_2 = 8 - \sqrt{19}$ cm $\doteq 3,64$ cm (levý obrázek ze začátku příkladu),
- $d_2 = a_1 + a_2 = 8 + \sqrt{19}$ cm $\doteq 12,36$ cm

Př. 2: Je dána kružnice $k(S; 2)$ a libovolný bod A , takový, že platí $|SA| = 4$. Z bodu A jsou sestrojeny tečny kružnice k a body dotyku těchto tečen T_1, T_2 . Urči:

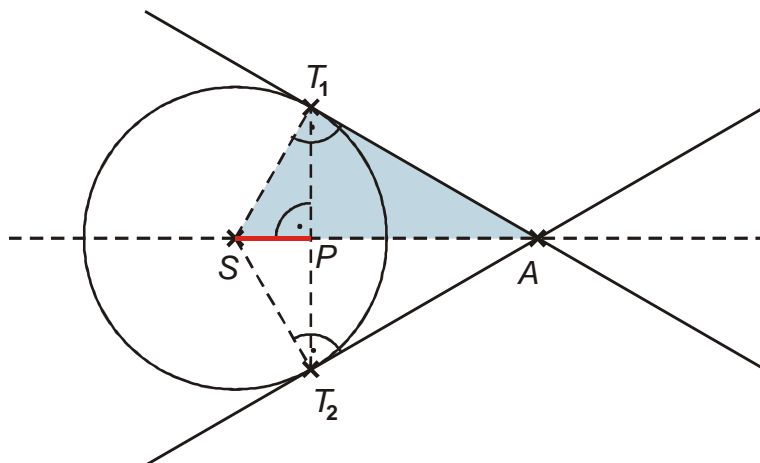
- a) $|AT_1|$ b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 c) $|T_1T_2|$

Nakreslíme si obrázek situace:



a) Délku úsečky AT_1 určíme jako velikost odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 :

$$|AT_1| = \sqrt{|SA|^2 - |ST_1|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 je v obrázku nakreslena jako úsečka SP . Úsečka SP je v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 jedním úsekem přepony \Rightarrow

$$a^2 = c \cdot c_a \Rightarrow |ST_1|^2 = |SA| \cdot |SP| \Rightarrow |SP| = \frac{|ST_1|^2}{|SA|} = \frac{2^2}{4} = 1$$

c) $|T_1T_2|$

bod P je středem úsečky $T_1T_2 \Rightarrow$ určíme vzdálenost PT_1 a vynásobíme ji dvěma
úsečka PT_1 je výškou v pravoúhlém trojúhelníku $SAT_1 \Rightarrow$

$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} \Rightarrow |PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|}$$

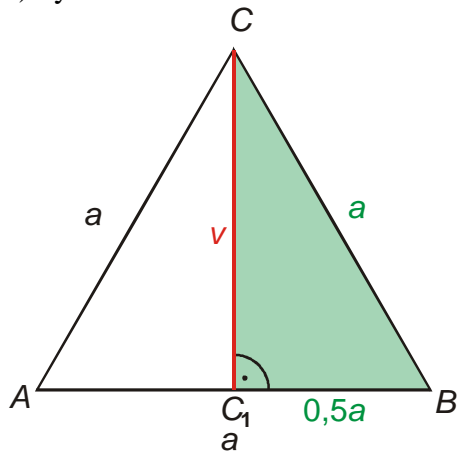
$$\text{Spočteme } |PA| = |SA| - |ST_1| = 4 - 2 = 2$$

$$\text{Dosadíme: } |PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \Rightarrow |T_1T_2| = 2\sqrt{2}$$

Př. 3: Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky a . Urči:

- a) výšku v b) poloměr kružnice opsané c) poloměr kružnice vepsané

a) výšku v



Výška je v rovnostranném trojúhelníku zároveň těžnicí \Rightarrow rozdělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

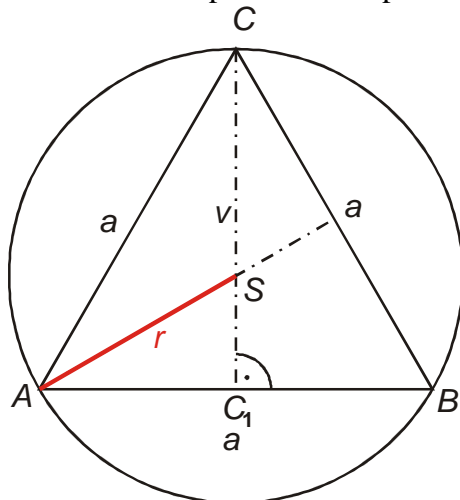
V trojúhelníku CBC_1 platí: $a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

b) poloměr kružnice opsané

střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran

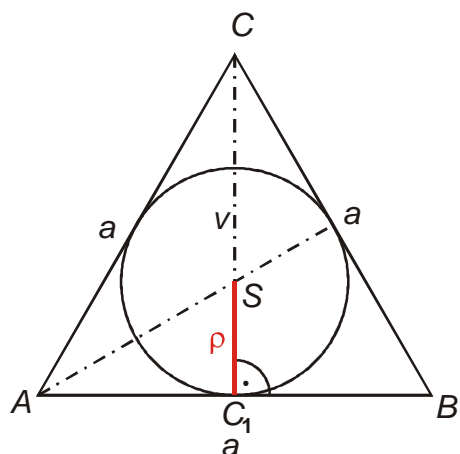


osy stran jsou u rovnostranného trojúhelníku zároveň výškami i těžnicemi \Rightarrow střed kružnice je v těžišti trojúhelníka a jeho poloměr je roven vzdálenosti SA , tedy dvěma třetinám výšky

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{6}a$$

c) poloměr kružnice vepsané

střed kružnice vepsané leží na průsečíku os úhlů

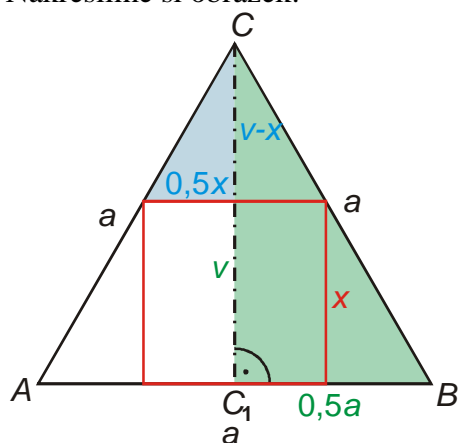


osy úhlů jsou u rovnostranného trojúhelníku zároveň výškami i těžnicemi \Rightarrow střed kružnice vepsané je v těžišti trojúhelníka a jeho poloměr je roven vzdálenosti SC_1 , tedy třetině výšky

$$r = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

Př. 4: Do rovnostranného trojúhelníka ABC o straně a je vepsán čtverec. Urči délku strany čtverce.

Nakreslíme si obrázek:



V obrázku můžeme najít dva podobné trojúhelníky. Z poměru vyznačených stran vyplývá:

$$\frac{\frac{x}{2}}{v-x} = \frac{\frac{a}{2}}{v} \quad \frac{x}{v-x} = \frac{a}{v}$$

$$vx = av - ax$$

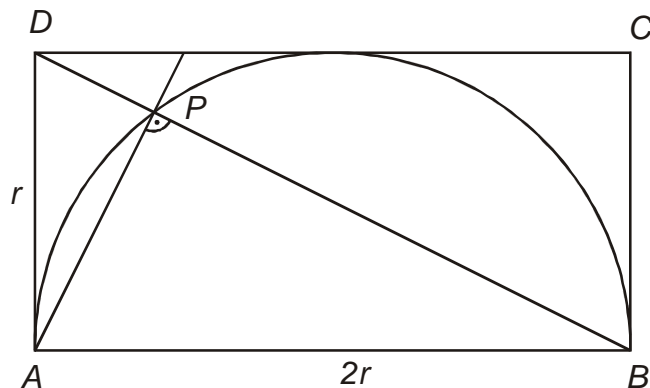
$$vx + ax = av \Rightarrow x = \frac{av}{v+a}$$

$$\text{Dosadíme } v = \frac{\sqrt{3}}{2} a: x = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2} a}{\frac{\sqrt{3}}{2} a + a} = \frac{a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)} = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$$

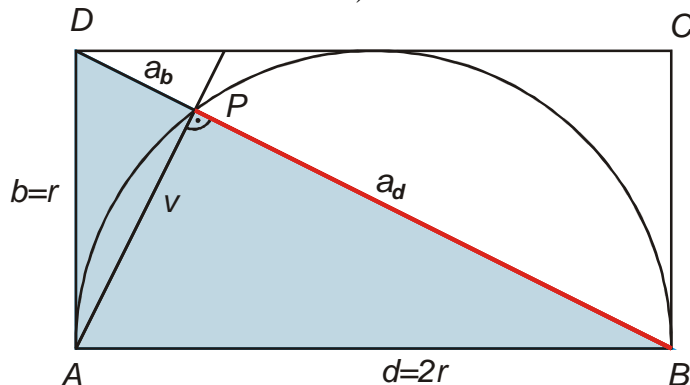
Vepsaný čtverec musí mít délku strany $x = a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

Př. 5: Nad úsečkou délky $2r$ je jako nad průměrem opsaná půlkružnice. Sestroj obdélník, jehož druhý rozměr je r . Jaká část úhlopříčky obdélníka leží uvnitř kružnice?

Nakreslíme obrázek:



V obrázku jsou tři pravoúhlé trojúhelníky. Jedině u trojúhelníka ABD známe dvě strany (a snadno můžeme určit i třetí).



V tomto trojúhelníku potřebujeme spočítat délku úseku na přeponě. Označíme si strany a úseky přepony.

Určíme délku přepony BD : $|BD| = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$

Použijeme větu o odvěsně (chceme vypočítat a_d):

$$d^2 = a_d \cdot a$$

$$a_d = \frac{d^2}{a} = \frac{(2r)^2}{r\sqrt{5}} = \frac{4r^2}{r\sqrt{5}} = \frac{4r}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}r\sqrt{5}$$

Pedagogická poznámka: Značná část studentů má problém s pouhým nakreslením obrázku.

Tam kontrolujeme poprvé. Vhodný trojúhelník najdou studenti docela snadno, větší problémy pak mají se správnou aplikací Euklidových vět.

Př. 6: Petáková:

strana 87/cvičení 41 c) e)

strana 88/cvičení 44

strana 88/cvičení 45

Shrnutí: