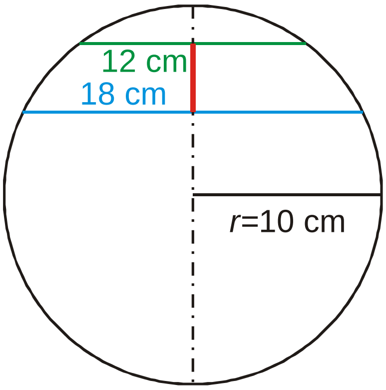
3.2.7 Příklady řešené pomocí vět pro trojúhelníky

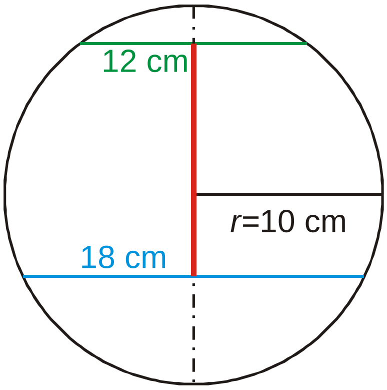
Předpoklady: 3204, 3206

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů (a u mnoha dalších příkladů z geometrie) platí, že nedílnou součástí řešení je nápad (který se také nemusí dostavit). Proto v průběhu přemýšlení o příkladu postrkuji třídu pomocí návodných otázek.

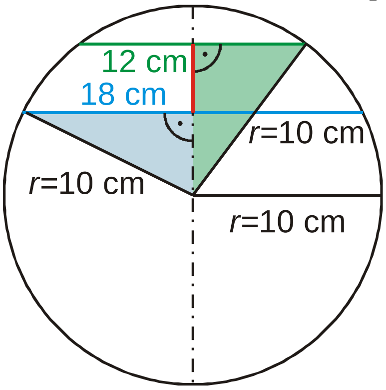
Př. 1: V kružnici o poloměru $r = 10\,\text{cm}$ urči vzdálenost dvou rovnoběžných tětiv o délkách 12 cm a 18 cm.

Dvě možnosti:





Budeme se zabývat prvním obrázkem (druhý dořešíme snadno).
V obrázku není nic, co by umožňovalo spočítat jakoukoliv vzdálenost. Musíme „dostat známé vzdálenosti k sobě“, nebo vytvořit trojúhelníky, je třeba využít vlastnosti kružnice $\Rightarrow$ dokreslíme do obrázku další poloměry tak, aby končily u krajních bodů obou tětiv.



Vzdálenost obou tětiv získáme jako rozdíl délek odvěsen ve vyznačených pravoúhlých trojúhelnících s přeponou $r = 10\,\text{cm}$.

Zelený trojúhelník (kratší tětiva): $a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

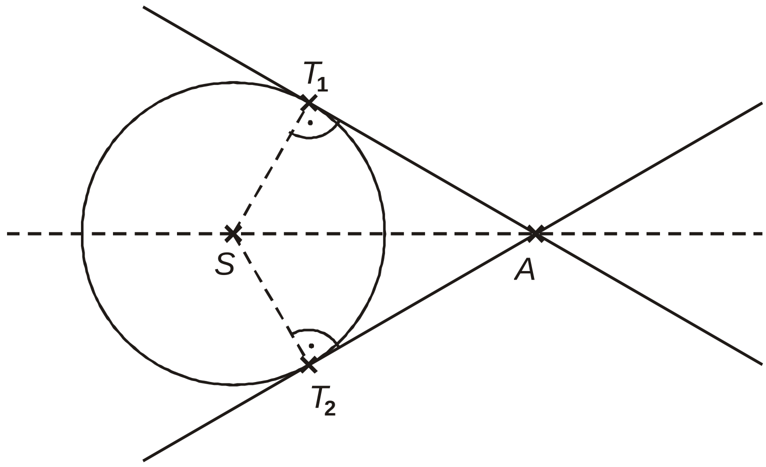
Modrý trojúhelník (delší tětiva): $a_2 = \sqrt{c_2^2 - b_2^2} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19}$

Vzdálenost obou tětiv:

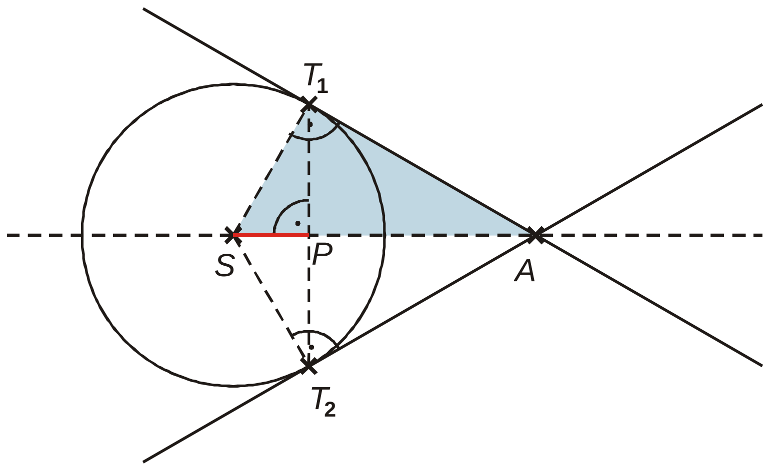
- $d_1 = a_1 - a_2 = 8 - \sqrt{19}\,\text{cm} \doteq 3{,}64\,\text{cm}$ (levý obrázek ze začátku příkladu),
- $d_2 = a_1 + a_2 = 8 + \sqrt{19}\,\text{cm} \doteq 12{,}36\,\text{cm}$

Př. 2: Je dána kružnice $k(S;2)$ a libovolný bod A, takový, že platí $|SA| = 4$. Z bodu A jsou sestrojeny tečny kružnice k a body dotyku těchto tečen T_1, T_2. Urči:
a) $|AT_1|$ b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 c) $|T_1T_2|$

Nakreslíme si obrázek situace:



a)
Délku úsečky AT_1 určíme jako velikost odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1:
$|AT_1| = \sqrt{|SA|^2 - |ST_1|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



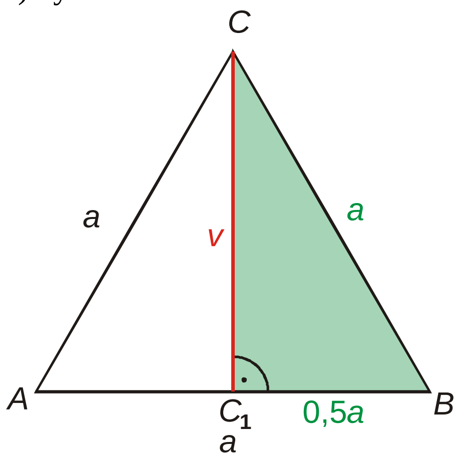
b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 je v obrázku nakreslena jako úsečka SP. Úsečka SP je v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 jedním úsekem přepony $\Rightarrow$

$$a^2 = c \cdot c_a \Rightarrow |ST_1|^2 = |SA| \cdot |SP| \Rightarrow |SP| = \frac{|ST_1|^2}{|SA|} = \frac{2^2}{4} = 1$$

c) $|T_1T_2|$
bod P je středem úsečky T_1T_2 $\Rightarrow$ určíme vzdálenost PT_1 a vynásobíme ji dvěma
úsečka PT_1 je výškou v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 $\Rightarrow$
$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} \Rightarrow |PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|}$
Spočteme $|PA| = |SA| - |ST_1| = 4 - 1 = 3$
Dosadíme: $|PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|} = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3} \Rightarrow |T_1T_2| = 2\sqrt{3}$

Př. 3: Je dán rovnostranný trojúhelník *ABC* se stranou délky *a*. Urči:
a) výšku v b) poloměr kružnice opsané c) poloměr kružnice vepsané

a) výšku v



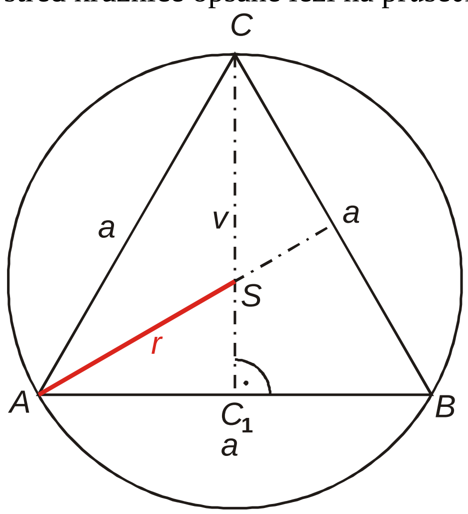
Výška je v rovnostranném trojúhelníku zároveň těžnicí $\Rightarrow$ rozdělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

V trojúhelníku CBC_1 platí: $a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

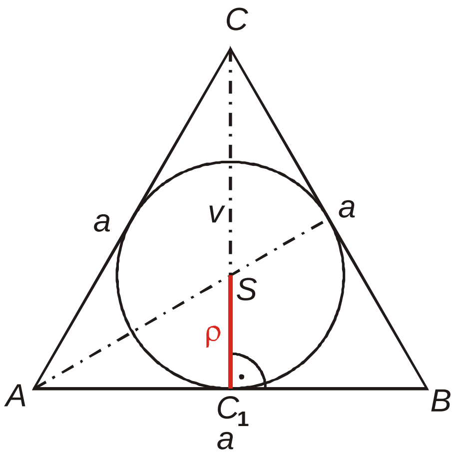
b) poloměr kružnice opsané
střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran



osy stran jsou u rovnostranného trojúhelníku zároveň výškami i těžnicemi $\Rightarrow$ střed kružnice je v těžišti trojúhelníka a jeho poloměr je roven vzdálenosti SA, tedy dvěma třetinám výšky

$$r = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{6}a$$

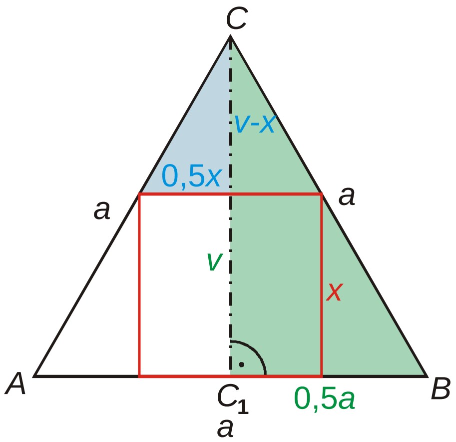
c) poloměr kružnice vepsané
střed kružnice vepsané leží na průsečíku os úhlů



osy úhlů jsou u rovnostranného trojúhelníku zároveň výškami i těžnicemi $\Rightarrow$ střed kružnice vepsané je v těžišti trojúhelníka a jeho poloměr je roven vzdálenosti SC_1, tedy třetině výšky $r=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

Př. 4: Do rovnostranného trojúhelníka ABC o straně a je vepsán čtverec. Urči délku strany čtverce.

Nakreslíme si obrázek:



V obrázku můžeme najít dva podobné trojúhelníky. Z poměru vyznačených stran vyplývá:

$$\frac{\frac{x}{2}}{v-x}=\frac{\frac{a}{2}}{v} \qquad \frac{x}{v-x}=\frac{a}{v}$$

$$vx=av-ax$$

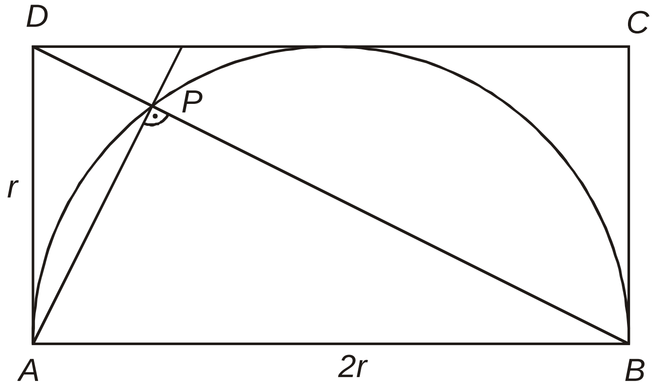
$$vx+ax=av \quad \Rightarrow \quad x=\frac{av}{v+a}$$

Dosadíme $v=\frac{\sqrt{3}}{2}a$: $x=\dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a+a}=\dfrac{a^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}=\dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}=a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

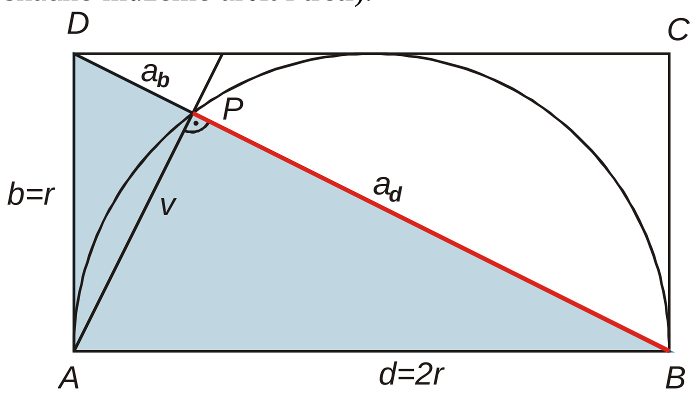
Vepsaný čtverec musí mít délku strany $x=a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

Př. 5: Nad úsečkou délky 2*r* je jako nad průměrem opsaná půlkružnice. Sestroj obdélník, jehož druhý rozměr je *r*. Jaká část úhlopříčky obdélníka leží uvnitř kružnice?

Nakreslíme obrázek:



V obrázku jsou tři pravoúhlé trojúhelníky. Jedině u trojúhelníka *ABD* známe dvě strany (a snadno můžeme určit i třetí).



V tomto trojúhelníku potřebujeme spočítat délku úseku na přeponě. Označíme si strany a úseky přepony.

Určíme délku přepony *BD*: $|BD| = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$

Použijeme větu o odvěsně (chceme vypočítat a_d):

$$d^2 = a_d \cdot a$$

$$a_d = \frac{d^2}{a} = \frac{(2r)^2}{r\sqrt{5}} = \frac{4r^2}{r\sqrt{5}} = \frac{4r}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} r\sqrt{5}$$

Pedagogická poznámka: Značná část studentům má problém s pouhým nakreslením obrázku. Tam kontrolujeme poprvé. Vhodný trojúhelník najdou studenti docela snadno, větší problémy pak mají se správnou aplikací Euklidových vět.

Př. 6: Petáková:
strana 87/cvičení 41 c) e)
strana 88/cvičení 44
strana 88/cvičení 45

Shrnutí: