

3.2.8 Oblouková míra

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Tato hodina zabere přibližně jednu a půl vyučovací hodiny. Na 45 minut je možné hodinu zkrátit buď vynecháním některých převodů na konci (vzhledem k tomu, že je studenti budou probírat ještě jednou na začátku goniometrie to není žádná tragédie) nebo přeskočením úvodního odvozování (nedoporučuji).

Pokud mají žáci za sebou kapitolu o kruhovém pohybu ze sesterské učebnice fyziky, je stihnoutí látky za 45 minut reálné, protože jde fakticky o opakování. Pokud nestihnete všechno, je možné příklady dopočítat v následující hodině a zkrátit dokazování.

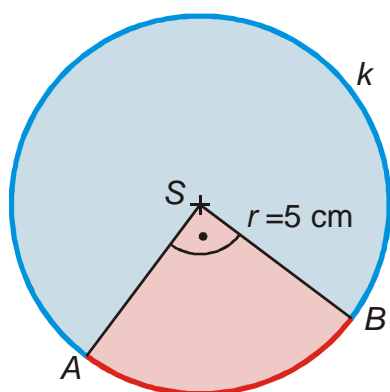
Opakování:

- obvod kružnice $o = 2\pi r$
- plný úhel: 360°
- pravý úhel: 90°

Př. 1: Urči obvod kruhu s poloměru $r = 5$ cm .

Dosadíme do vzorce: $o = 2\pi r = 2\pi \cdot 5$ cm $= 10\pi$ cm $= 31,4$ cm

Kruh o poloměru 5 cm má obvod přibližně 31,4 cm.



Př. 2: Urči na kružnici o poloměru $r = 5$ cm délku kružnicového oblouku se středovým úhlem 90° .

Pravý úhel je čtvrtinou plného úhlu \Rightarrow délka kružnicového oblouku bude čtvrtinou obvodu

kruhu o stejném poloměru $\Rightarrow d = \frac{o}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \cdot 5}{4}$ cm $= 7,8$ cm

Př. 3: Urči na kružnici o poloměru r délku kružnicového oblouku se středovým úhlem:

- a) 20° b) α .

obvod celé kružnice $o = 2\pi r$

- a) 20°

použijeme přímou úměrnost:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \dots & 2\pi r \\ 20^\circ & \dots & x \\ \frac{x}{20} = \frac{2\pi r}{360} & \Rightarrow & x = \frac{20}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{9} r \end{array}$$

Oblouk se středovým úhlem 20° má délku $\frac{\pi}{9} r$

b) α

použijeme přímou úměrnost:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \dots & 2\pi r \\ \alpha & \dots & x \\ \frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360} & \Rightarrow & x = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\alpha\pi}{180} r \end{array}$$

Oblouk se středovým úhlem α má délku $\frac{\alpha}{180} \pi r$

Př. 4: Doplň tabulku:

středový úhel [otáčky]	středový úhel [$^\circ$]	délka oblouku o poloměru r_1	délka oblouku o poloměru r_2
otáčka	360°	$2\pi r_1$	
půlotáčka			
	90°		
desetina otáčky			
	20°		

středový úhel [otáčky]	středový úhel [$^\circ$]	délka oblouku o poloměru r_1	délka oblouku o poloměru r_2
otáčka	360°	$2\pi r_1$	$2\pi r_2$
půlotáčka	180°	πr_1	πr_2
čtvrt otáčky	90°	$\frac{\pi}{2} r_1$	$\frac{\pi}{2} r_2$
desetina otáčky	36°	$\frac{\pi}{5} r_1$	$\frac{\pi}{5} r_2$
osmnáctina otáčky	20°	$\frac{\pi}{9} r_1$	$\frac{\pi}{9} r_2$

postřehy:

- výpočet délky oblouku ze středového úhlu ve stupních není zrovna pohodlný. Hodnotu ve stupních vydělíme 180 a získaným číslem vynásobíme výraz πr
- výrazy pro délky oblouků jsou u obou poloměrů naprosto stejné, liší se pouze v dosazované hodnotě poloměru
- oběma obloukům v jedné řádce odpovídá stejný středový úhel \Rightarrow výrazy před poloměrem jsou velikostí středového úhlu určenou v nové jednotce (ale pro určování úhlu jde o přirozenou jednotku, umožňující snadný výpočet délky oblouku podle vzorce $s = \varphi r$).

Jednotka úhlu umožňující výpočet délky oblouku vzorcem $s = \varphi r$ se nazývá **radián**.

Př. 5: Najdi v tabulce převodní vztah mezi stupni a radiány.

Každá řádka nám umožňuje napsat takový vztah: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$,

$36^\circ = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$ atd.

Platí:

$$1 \text{ otáčka} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Pokud udáváme velikost úhlu v radiánech, říkáme, že používáme **obloukovou míru** (radiány usnadňují výpočet délky oblouku).

Rozlišujeme:

- $\alpha \Rightarrow$ velikost úhlu v míře stupňové
- $\text{arc } \alpha \Rightarrow$ velikost úhlu v míře obloukové

Pedagogická poznámka: Bavíme se ze studenty o tom, proč je nejlepší z uvedených vztahů pro převádění stupňů a radiánů vztah $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ (je v něm schována myšlenka radiánů jako snadného výpočtu délky oblouku, výraz vpravo je přece téměř vzorcem pro obvod kružnice).

Př. 6: Je dána kružnice o poloměru r . Urči délku oblouku této kružnice se středovým úhlem: a) 1 rad b) 0,5 rad c) $0,1\pi \text{ rad}$

Středový úhel je v radiánech \Rightarrow použijeme vzorec $s = \varphi r$.

a) 1 rad: $s = \varphi r = 1 \cdot r = r$

b) 0,5 rad: $s = \varphi r = 0,5 \cdot r = 0,5r$

c) $0,1\pi \text{ rad}$: $s = \varphi r = 0,1\pi \cdot r = 0,1\pi r$

Opravdu nejde o obtížné počítání.

Ze vzorce $s = \varphi r$ vychází i definice radiánu:

1 radián je středový úhel, který na kružnici s poloměrem r vytkne oblouk o délce r .

Př. 7: Vypočti velikost 1 radiánu ve stupních.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad /:2\pi$$



$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \doteq 57,295^\circ$$

Př. 8: Vypočti velikost 1 stupně v radiánech.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad /:360$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \doteq 0,01745 \text{ rad}$$

Mnozí se brání používání radiánů, protože pro lidské uvažování není přirozenou jednotkou. I když není jednoduché si představit rozdělení kruhu na 6,283185307... částí, 1 radián není o nic méně představitelný než jeden stupeň, jak ukazuje následující obrázek:

výseč se středovým úhlem 1 stupeň	výseč se středovým úhlem 1 radián
	

Sestavit celý kruh je dokonce značně jednodušší pomocí radiánových výsečí než pomocí výsečí stupňových:



Poslední výseč prostě není celá.

Př. 9: Převed' 60° na radiány. Výsledek vyjádři v přesném tvaru pomocí čísla π .

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$$

$$60^\circ = 60 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{120\pi}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Př. 10: Vyjádři v radiánech v přesném tvaru pomocí π :

a) 45°

b) 90°

c) 210°

$$\text{a) } 45^\circ = 45 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{90\pi}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\text{b) } 90^\circ = 90 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{180\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$c) 210^\circ = 210 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{420\pi}{360} = \frac{7}{6}\pi \text{ rad}$$

Př. 11: Vyjádři ve tvaru desetinného čísla s přesností na dvě desetinná místa v radiánech velikosti úhlů:

a) 70° b) 358° c) 181°

a) 70°

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{7 \cdot 2\pi}{36} = 1,22 \text{ rad}$$

b) 358°

$$358^\circ = 358 \cdot \frac{2\pi}{360} = 6,25 \text{ rad}$$

c) 181°

$$181^\circ = 181 \cdot \frac{2\pi}{360} = 3,16 \text{ rad}$$

Př. 12: Vyjádři ve stupních $\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \frac{360^\circ}{2\pi} = 1 \text{ rad}$$

$$\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

Př. 13: Vyjádři ve stupních:

a) $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ b) $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$ c) $\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \frac{360^\circ}{2\pi} = 1 \text{ rad}$$

a) $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$

$$\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

b) $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$

$$\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{3 \cdot 360^\circ}{4} = 270^\circ$$

c) $\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$

$$\frac{5}{6}\pi \text{ rad} = \frac{5}{6}\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{5 \cdot 60^\circ}{2} = 150^\circ$$

Př. 14: Vyjádři ve tvaru desetinného čísla s přesností na dvě desetinná místa ve stupních

velikosti úhlů: a) $\frac{\pi}{15}$ rad b) $1,1\pi$ rad c) 5 rad d) 0,25 rad

a) $\frac{\pi}{15}$ rad

$$\frac{\pi}{15} \text{ rad} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi}^\circ = 12^\circ$$

b) $1,1\pi$ rad

$$1,1\pi \text{ rad} = 1,1\pi \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi}^\circ = 198^\circ$$

c) 5 rad

$$5 \text{ rad} = 5 \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi}^\circ = 286,48^\circ$$

d) 0,25 rad

$$0,25 \text{ rad} = 0,25 \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi}^\circ = 14,32^\circ$$

Př. 15: Petáková:

strana 40/cvičení 1 α) ω)

strana 40/cvičení 2 α)

strana 40/cvičení 3 x_1

strana 40/cvičení 4 y_1) y_4)

Shrnutí: Oblouková míra (radiány) umožňuje při výpočtu délky oblouku používat vzorec $s = \varphi \cdot r$.