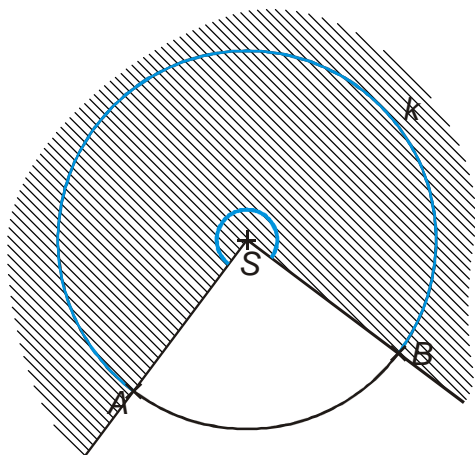


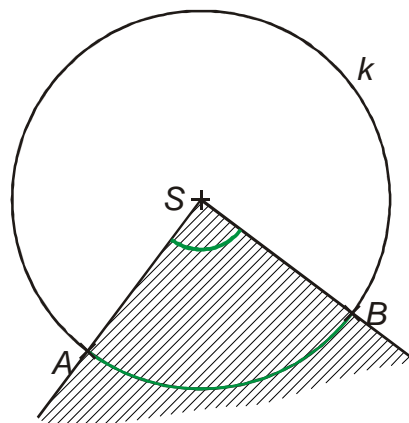
3.2.9 Věta o středovém a obvodovém úhlu

Předpoklady:

Body A, B rozdělují kružnici k na dva oblouky. Polopřímky SA a SB pak rozdělují rovinu na dva úhly. Vrcholy obou úhlů leží ve středu kružnice \Rightarrow říkáme, že jde o **středové úhly příslušné oblouku AB** .



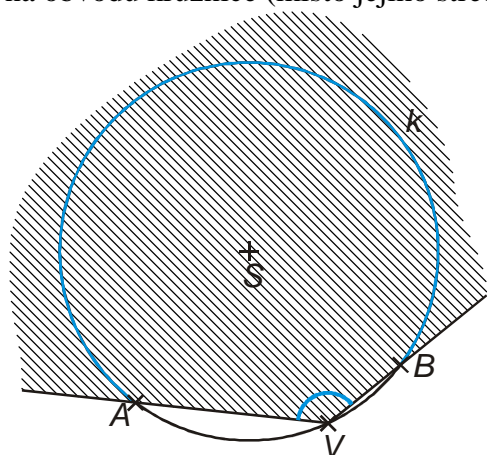
Většímu oblouku AB přísluší nekonvexní středový úhel.



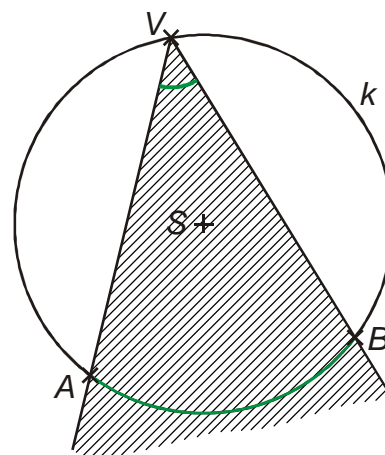
Menšímu oblouku AB přísluší konvexní středový úhel.

Dodatek: Definice: Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k , se nazývá **středový úhel příslušný k tomu oblouku AB** , který v tomto úhlu leží.

Kromě středového úhlu můžeme k oběma obloukům najít i **úhly obvodové**. Jejich vrcholy leží na obvodu kružnice (místo jejího středu).



Obvodový úhel příslušný většímu oblouku AB .

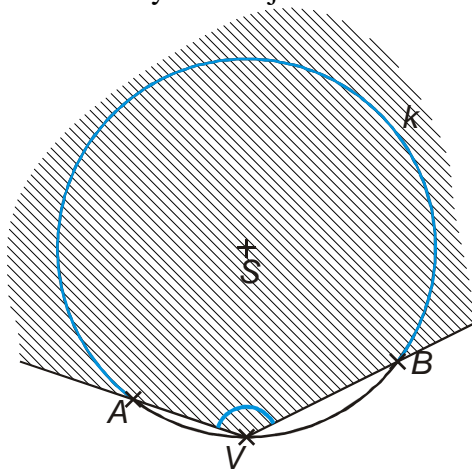


Obvodový úhel příslušný menšímu oblouku AB .

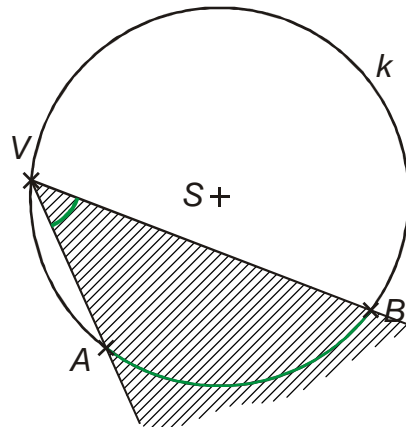
Dodatek: Definice: Úhel, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá **obvodový úhel příslušný k tomu oblouku AB** , který v tomto úhlu leží.

Velký rozdíl:

- středový úhel určen jednoznačně (kružnice má pouze jeden střed),
- obvodových úhlů je nekonečně mnoho (druhý oblouk má nekonečně mnoho bodů).



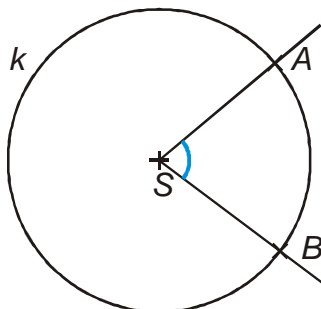
Obvodový úhel příslušný většímu oblouku AB.



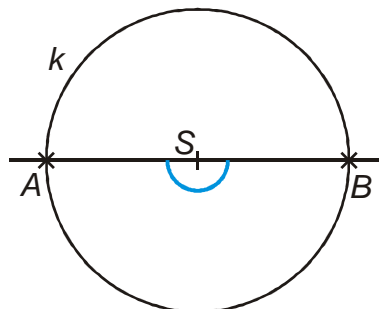
Obvodový úhel příslušný menšímu oblouku AB.

Pedagogická poznámka: Samozřejmě je daleko lepší nakreslit několik úhlů na tabuli, než promítat z dva statické obrázky z projektoru.

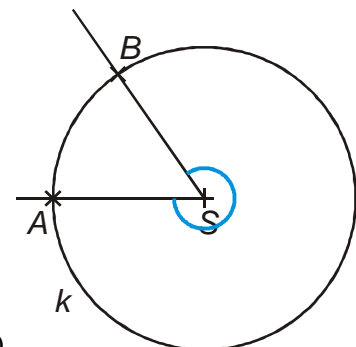
Př. 1: Doplně do obrázků k nakresleným středovým úhlům úhly obvodové.



a)

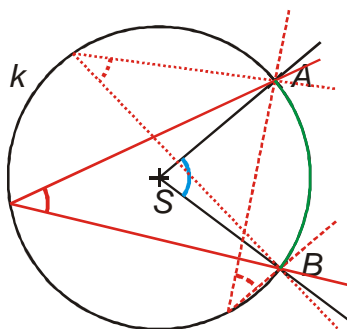


b)

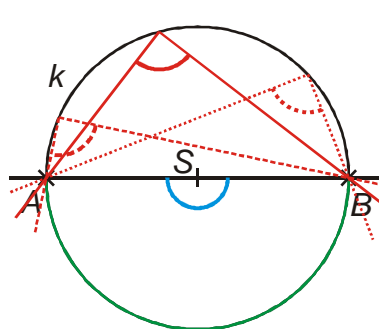


c)

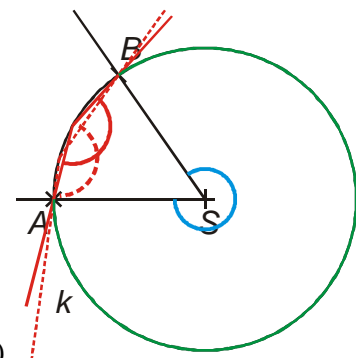
Ve všech případech existuje nekonečně mnoho množností. Například:



a)



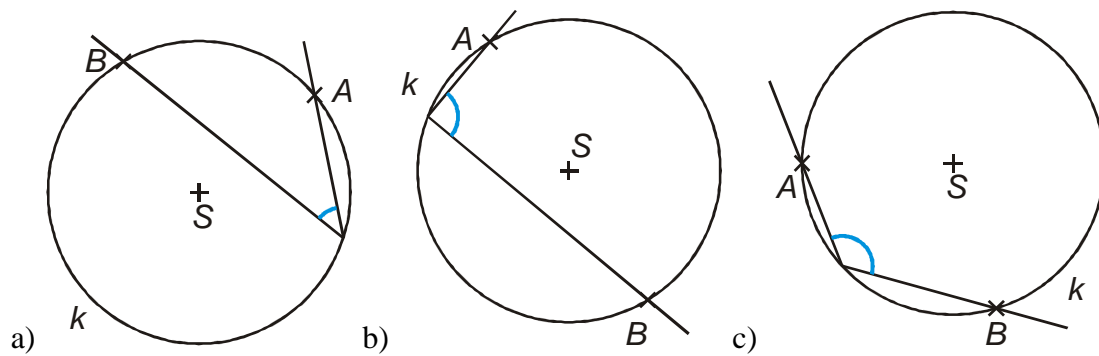
b)



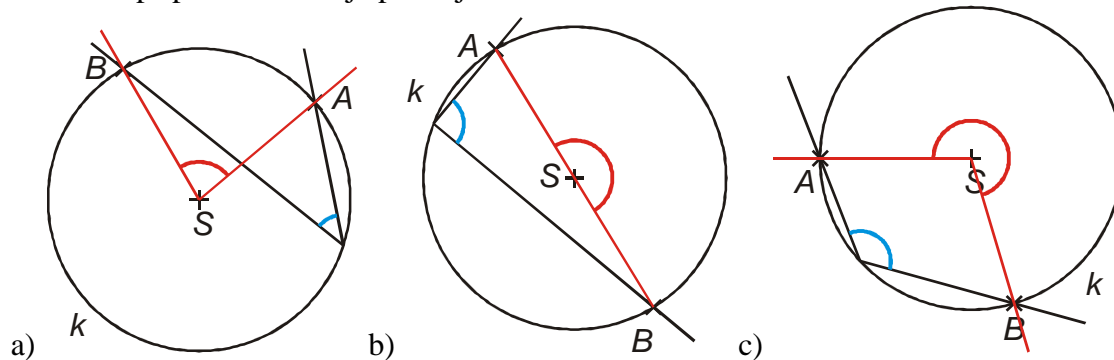
c)

Pedagogická poznámka: Body b) a c) nejsou pro studenty samozřejmé. Pokud mají problémy, nechte je, aby si vyznačili oblouk, ke kterému středový úhel patří.

Př. 2: Doplně do obrázků k nakresleným obvodovým úhlům jejich úhly středové.

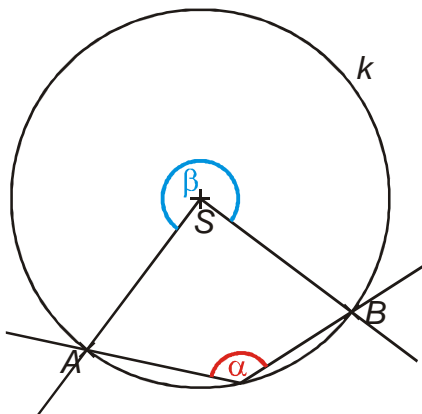


Ve všech případech existuje právě jedno řešení:



Pedagogická poznámka: Ve třídě vždy žáky při následujícím příkladu rozdělím a část z nich hledá úhly příslušející většímu oblouku (v opačném případě všichni rýsují úhly příslušející menšímu oblouku).

Př. 3: Narýsuj kružnici k , vyznač na ní dva navzájem různé body A, B a dvojici středový a obvodový úhel pro jeden z oblouků, který body A, B na kružnici vytknou. Změř oba vyznačené úhly a najdi vztah mezi nimi.



Pro úhly na obrázku platí:

$$\alpha = 135^\circ$$

$$\beta = 270^\circ$$

⇒ Zdá se, že středový úhel je dvakrát větší než příslušný úhel obvodový.

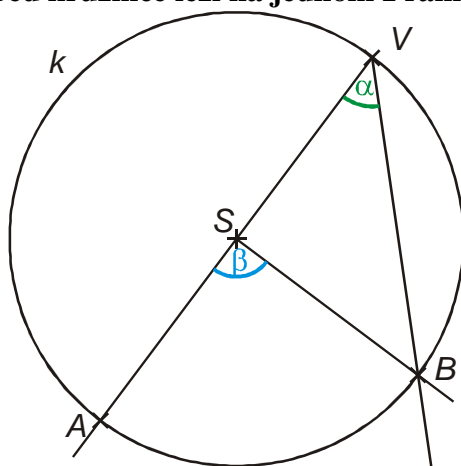
Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Předchozí věta má několik zajímavých a důležitých důsledků a není samozřejmá ⇒ provedeme důkaz.

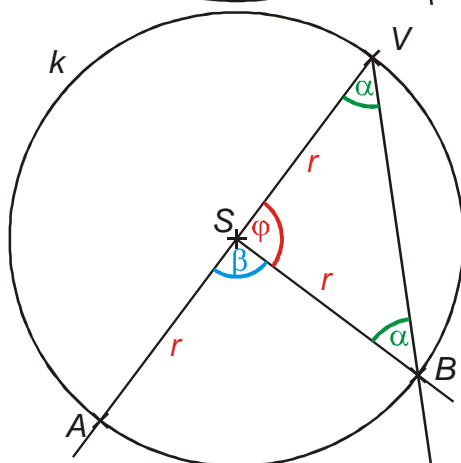
Pedagogická poznámka: V hodině nedokazují na tabuli klasicky. Nechávám na žácích, aby sami hledali další kroky. Nejdříve nakreslím na tabuli jen kružnici se středovým úhlem a hledáme takové postavení vrcholového úhlu, ve kterém by mohl být důkaz nejjednodušší. Žáci většinou navrhnou rozdělit středový úhel osou a tu protáhnout tak, aby její průsečík s kružnicí určil vrchol V . Je zajímavé (a upozorňuji na to), že tím vlastně vytvoří dvojitou situaci, se kterou později také někdo přijde a ze které pak doopravdy dokážeme.

Nejjednodušší možnost: úhly příslušející menšímu oblouku:

1. střed kružnice leží na jednom z ramen obvodového úhlu AVB .



Využijeme speciální vlastnosti situace: body V, B, A leží na kružnici $k \Rightarrow$ jejich vzdálenost od středu kružnice je shodná \Rightarrow označíme ji r .



Trojúhelník SBV je rovnoramenný \Rightarrow úhly SVB a VBS jsou shodné \Rightarrow pro úhel φ platí:

$$\varphi = 180^\circ - 2\alpha.$$

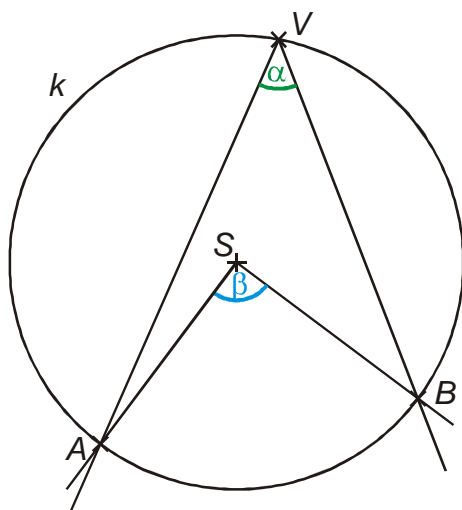
Úhle ASV je úhel přímý \Rightarrow platí:

$$\beta = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$

$$\text{Platí: } \beta = 2\alpha.$$

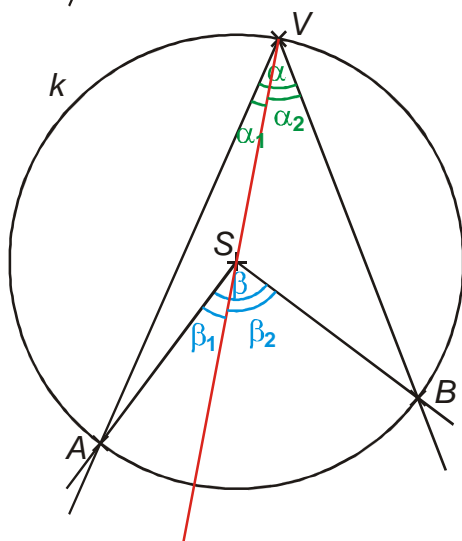
Ještě nejsme hotoví. K nakreslenému středovému úhlu ASB náleží nekonečně mnoho obvodových úhlů, z nichž pouze dva mají speciální polohu, pro kterou jsme větu dokázali. Zkusíme další možnosti:

2. střed kružnice leží uvnitř obvodového úhlu AVB .



Máme dvě možnosti:

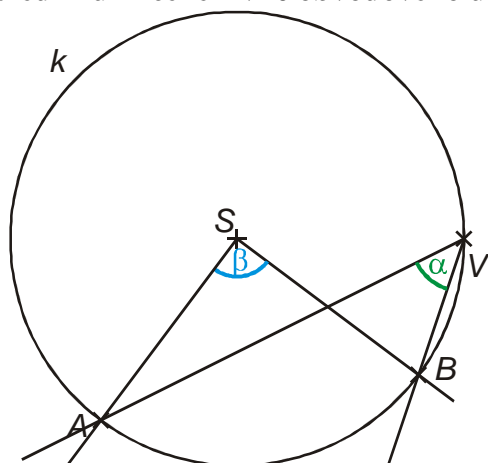
- vymyslet celý důkaz od začátku,
- upravit obrázek tak, abychom mohli použít předchozí důkaz pro speciální situaci se středem na ramenní obvodového úhlu.



Polopřímka VS rozdělí oba úhly na dvě části, střed kružnice S leží na společném rameni VS obou vzniklých obvodových úhlů \Rightarrow

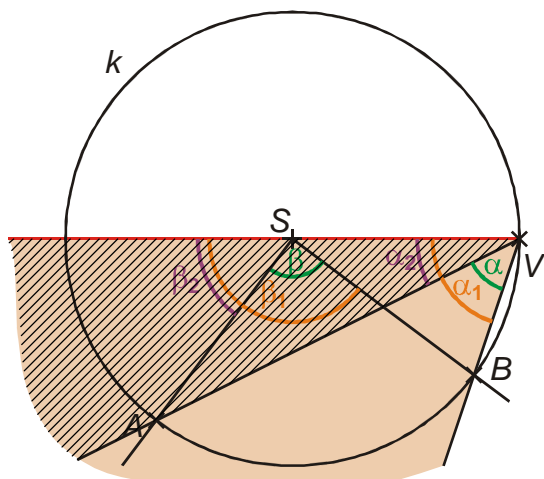
- platí $\beta_1 = 2\alpha_1$ (předchozí část důkazu),
 - platí $\beta_2 = 2\alpha_2$ (předchozí část důkazu),
- $\Rightarrow \beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$

3. střed kružnice leží vně obvodového úhlu AVB .



Opět dvě možnosti:

- vymyslet celý důkaz od začátku,
- upravit obrázek tak, abychom mohli použít předchozí důkaz pro speciální situaci se středem na ramenní obvodového úhlu.



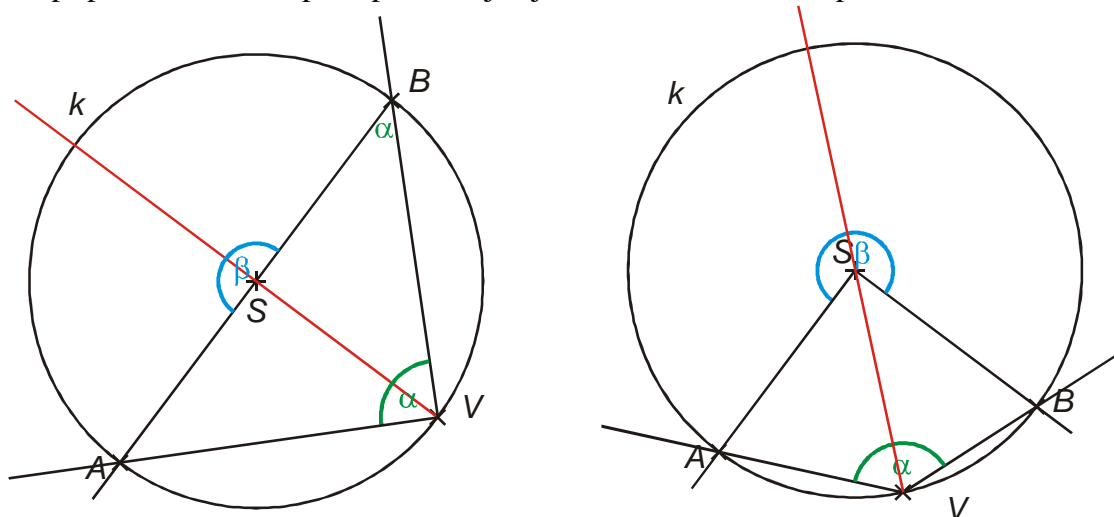
Polopřímka VS vytvoří v obrázku další dvě dvojice středový a obvodový úhel, střed kružnice S leží na společném rameni VS obou vzniklých obvodových úhlů \Rightarrow

- platí $\beta_1 = 2\alpha_1$ (předchozí část důkazu),
 - platí $\beta_2 = 2\alpha_2$ (předchozí část důkazu),
- $\Rightarrow \beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2\alpha$

Žádná další možná poloha neexistuje \Rightarrow dokázali jsme větu pro všechny úhly příslušející menšímu oblouku.

Př. 4: Navrhni důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu pro větší oblouk a půlkružnici

V obou případech můžeme postupovat stejně jako v kroku 2. důkazu pro menší oblouk.



Př. 5: Jaké má věta o obvodovém a středovém úhlu důsledky?

Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné.

(všechny jsou polovinou stejného středového úhlu)

Thaletova věta: Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

(Úhly nad průměrem kružnice jsou obvodové úhly ke středovému úhlu o velikosti 180°).

Př. 6: Doplň věty uvádějící důsledky věty o obvodovém a středovém úhlu.

- Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ...
- Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je ...
- Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je ...

Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ostrý.

Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je tupý.

Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je pravý = Thaletova věta.

Shrnutí: Středový úhel je dvakrát větší než příslušný obvodový úhel.