3.2.10 Důsledky věty o středovém a obvodovém úhlu

Předpoklady:

Věta objevená v minulé hodině:
Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

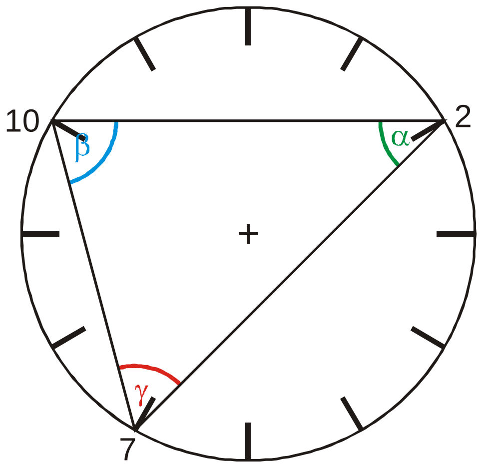
Nejčastěji využívané důsledky:

- Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné.
- **Thaletova věta: Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.**

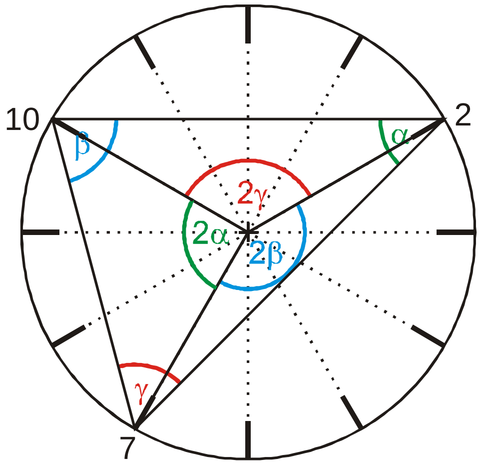
Př. 1: Kružnice je rozdělena na dva oblouky tak, že obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je roven středovému úhlu příslušnému k menšímu oblouku. Urči velikost obvodových úhlů příslušných k oběma obloukům

Větší oblouk: obvodový úhel α, středový úhel 2α.
Menší oblouk: obvodový úhel β, středový úhel 2β.
Platí: obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je roven středovému úhlu příslušnému k menšímu oblouku $\Rightarrow$ $\alpha = 2\beta$.
oba středové úhly se rovnají plnému úhlu: $2\alpha + 2\beta = 360°$
Dosadíme: $2\alpha + 2\beta = 2(2\beta) + 2\beta = 360°$
$\beta = 60°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 120°$

Př. 2: Vypočti velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, který dostaneš, spojíš-li na ciferníku hodinek body vyznačující čísla 2, 7, 10.



Stačí, když si uvědomíme, že všechny vyznačené úhly jsou úhly obvodové, najdeme k nim příslušné úhly středové.



Velikost středového úhlu příslušející oblouku mezi dvěma hodinami: $\frac{360°}{12} = 30°$.

2α : 3 dílky $\Rightarrow$ $2\alpha = 3 \cdot 30° = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$

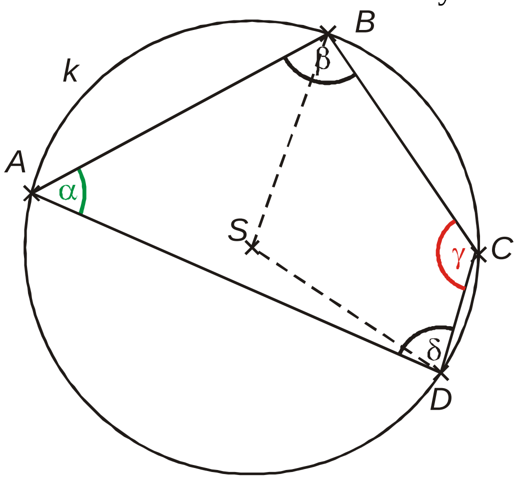
2β : 5 dílků $\Rightarrow$ $2\beta = 5 \cdot 30° = 150° \Rightarrow \alpha = 75°$

2γ: 4 dílky $\Rightarrow$ $2\gamma = 4 \cdot 30° = 120° \Rightarrow \gamma = 60°$

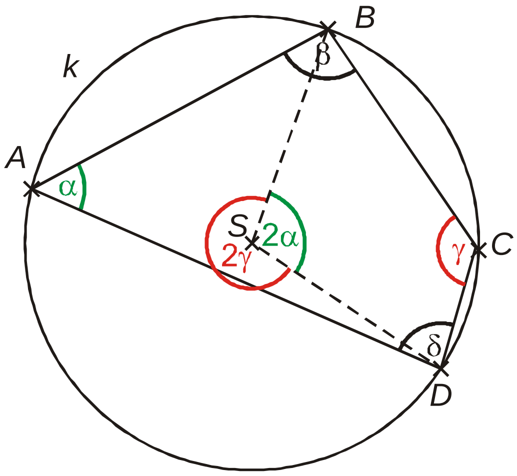
Př. 3: Jakou vlastnost musí mít všechny tětivové čtyřúhelníky? Dokaž.

Tětivový čtyřúhelník $\Rightarrow$ vrcholy leží na kružnici *k*. Součet protějších úhlu tětivového čtyřúhelníku musí být $180°$ (pravidlo z předchozí kapitoly).

Dokreslí do obrázku tětivového čtyřúhelníku s opsanou kružnicí úsečky *BS* a *DS*.



Plný úhel okolo středu *S* se rozdělí na dva středové úhly příslušné k obvodovým úhlům α a β.

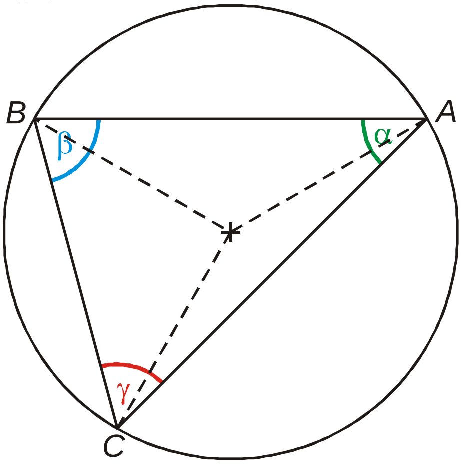


Platí: $2\alpha + 2\gamma = 360° \Rightarrow \alpha + \gamma = 180°$.

Obdobně můžeme postupovat pro dvojici protějších úhlů β a δ.

Př. 4: Pokus se zdůvodnit, proč ze skutečnosti, že všem trojúhelníkům je možné opsat kružnici, vyplývá, že součet úhlů v trojúhelníku se rovná $180°$. S kterým z předchozích příkladů tento postřeh nejvíce souvisí?

Spojíme vrcholy trojúhelníku se středem opsané kružnice.



Získáme tak tři středové úhly, které:

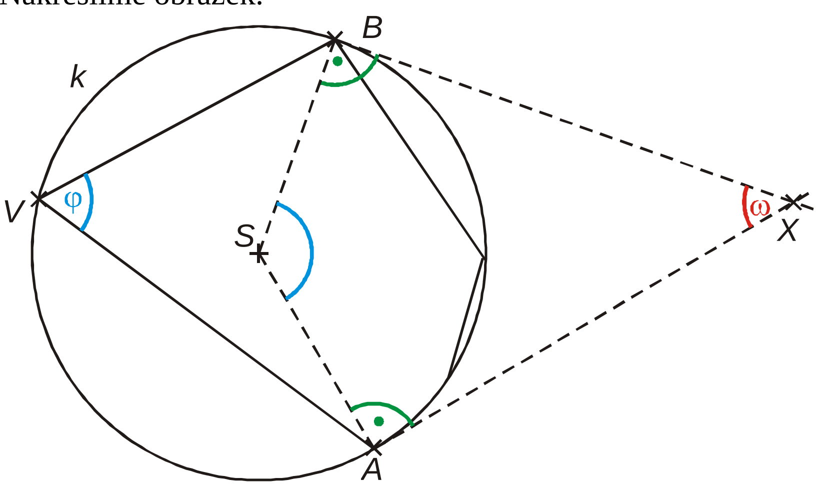
- mají dohromady součet $360°$ (plný úhel okolo středu *S*),
- přísluší jednotlivým vnitřním úhlům trojúhelníku *ABC* a jsou tedy jejich dvojnásobky.

Platí: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360° \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Příklad nejvíce souvisí s příkladem 2 (obrázek je ve skutečnosti převzatý a upravený).

Př. 5: AB je menší oblouk kružnice a obvodovým úhlem $65°$. V bodech *A*, *B* jsou sestrojeny tečny kružnice a bod *X* je jejich průsečík. Vypočti velikost úhlu *AXB*.

Nakreslíme obrázek.



Hledaný úhel *AXB* je jedním z vnitřních úhlů čtyřúhelníku *ASBX*.
Úhly čtyřúhelníku *ASBX*:

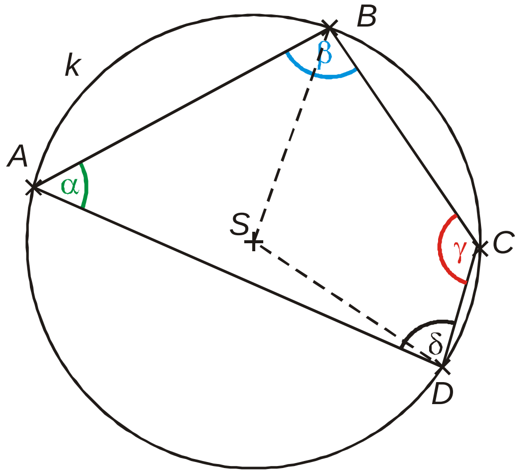
- úhly *ASX* a *SBX* jsou pravé (tečna je kolmá na poloměr)
- úhel *ASB* je středový úhel příslušný k obvodovému úhlu *AVB* $\Rightarrow$ $|\sphericalangle ASB| = 2\varphi = 130°$

$\omega = 360° - 2 \cdot 90° - 130° = 50°$

Úhel AXB má velikost $50°$.

Př. 6: V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$, platí $\alpha = 52°$, $\beta = 96°$. Urči zbývající vnitřní úhly.

Tětivový čtyřúhelník $\Rightarrow$ vrcholy leží na kružnici k.



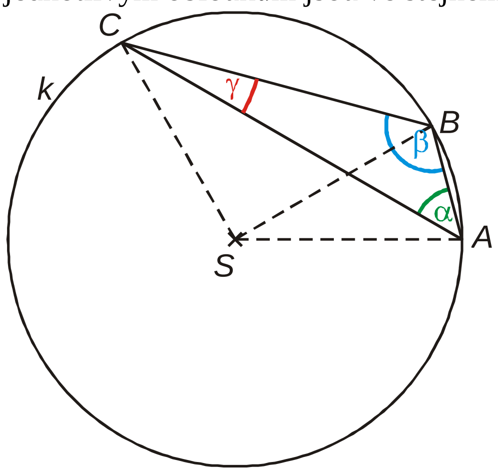
Úhel α je obvodový úhel k menšímu oblouku BD, úhel γ je obvodový úhel k většímu oblouku BD $\Rightarrow$ $\alpha + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - \alpha = 180° - 52° = 128°$

Úhel β je obvodový úhel k většímu oblouku AC, úhel δ je obvodový úhel k menšímu oblouku AC $\Rightarrow$ $\beta + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \beta = 180° - 96° = 84°$

Ve skutečnosti jsme větší část problému vyřešili již v příkladu 3, kde jsme odvodili vztah $\alpha + \gamma = 180°$ ($\beta + \delta = 180°$), který jsme mohli využít a požadované úhly z něj vypočítat.

Př. 7: Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC tak, že jeho vrcholy dělí kružnici k na tři oblouky v poměru $1:3:8$. Vypočti velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Délka oblouku je přímo úměrná velikosti středového úhlu $\Rightarrow$ středové úhly odpovídající jednotlivým obloukům jsou ve stejném poměru jako velikosti oblouků.



Poměr: $1:3:8$ $\Rightarrow$ 12 dílů $\Rightarrow$ 1 díl: $360°:12 = 30°$.
Vypočteme velikosti jednotlivých středových úhlů:

- $|\sphericalangle ASB| = 30°$,
- $|\sphericalangle BSC| = 3 \cdot 30° = 90°$,
- $|\sphericalangle CSA| = 8 \cdot 30° = 240°$.

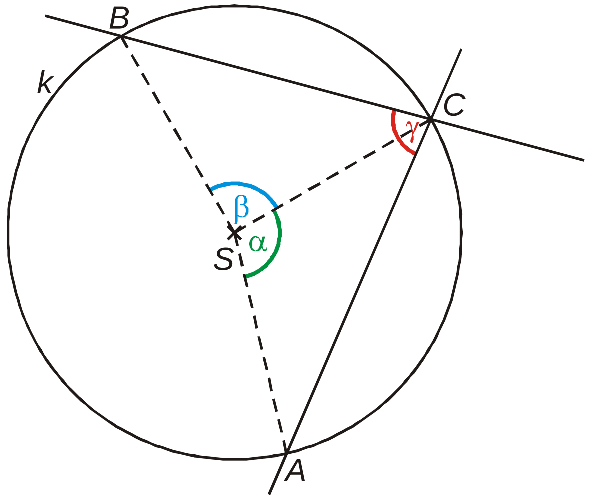
Vnitřní úhly trojúhelníku ABC jsou obvodové úhly odpovídajících středových úhlů $\Rightarrow$ určíme jejich velikosti:

- $\gamma = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 30° = 15°$,
- $\alpha = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BSC| = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$,
- $\beta = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CSA| = \frac{1}{2} \cdot 240° = 120°$.

Vnitřní úhly trojúhelníku ABC mají velikosti $15°$, $45°$ a $120°$.

Př. 8: Je dána kružnice $k(S;r)$ a dvě její tětivy AC, BC ($|AB| < 2r$, $|BC| < 2r$). Urči velikost úhlu ABC, jestliže menšímu oblouku AC náleží středový úhel α a menšímu oblouku BC středový úhel β.

Nakreslíme obrázek.



Úhel ACB je obvodový úhel ke středovému úhlu $360 - \alpha - \beta$ (zbytek plného úhlu u středu S)

$\Rightarrow$ pro úhel ACB platí $|\sphericalangle ACB| = 180 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Př. 9: Petáková:
strana 88/cvičení 51
strana 88/cvičení 53
strana 88/cvičení 54

Shrnutí: Středový úhel příslušný k danému obvodovému úhlu má dvojnásobnou velikost.