3.2.12 Obvody a obsahy obrazců I

Předpoklady:

S pomocí vzorců v uvedených v tabulkách řeš následující příklady

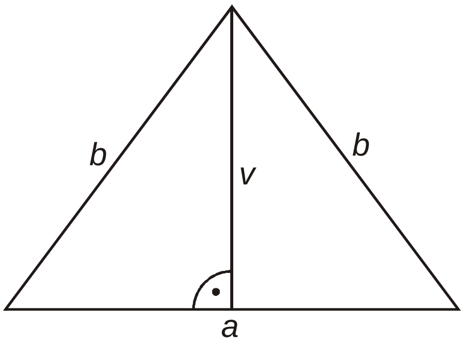
Př. 1: Urči výšku lichoběžníku o obsahu $54\,\text{cm}^2$ a základnách $7\,\text{cm}$ a $5\,\text{cm}$.

Obsah lichoběžníku: $S = \frac{a+c}{2}v \Rightarrow v = \frac{2S}{a+c} = \frac{2\cdot 54}{7+5}\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$

Výška lichoběžníku je 9 cm.

Př. 2: Vypočti obsah rovnoramenného trojúhelníku se základnou o $a = 6\,\text{cm}$ a ramenem $b = 5\,\text{cm}$.

Vzorec pro obsah trojúhelníka $S = \frac{a\cdot v_a}{2} \Rightarrow$ musím spočítat výšku na jednu ze stran, které známe



Trojúhelník je rovnoramenný $\Rightarrow$ výška na základnu je zároveň těžnicí $\Rightarrow$

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2}\ \text{cm} = 4\,\text{cm}$$

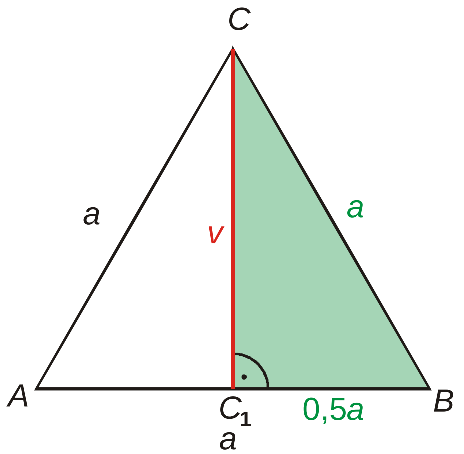
Spočteme obsah: $S = \frac{a\cdot v_a}{2} = \frac{6\cdot 4}{2}\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$

Př. 3: Urči stranu rovnostranného trojúhelníku s obsahem $15\,\text{cm}^2$.

Vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníka můžeme upravit do tvaru, kdy obsahuje pouze velikost strany *a*.

$$S = \frac{a\cdot v_a}{2}$$

Výšku určíme pomocí Pythagorovy věty:



$$a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

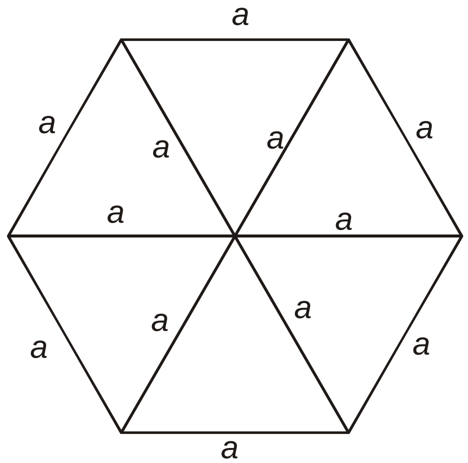
Vyjádříme *a*: $\frac{4S}{\sqrt{3}} = a^2$

$$a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15}{\sqrt{3}}}\,\text{cm} = 5{,}9\,\text{cm}$$

Rovnostranný trojúhelník s obsahem $15\,\text{cm}^2$ má stranu o délce $5{,}9\,\text{cm}$.

Pedagogická poznámka: Pokud mají studenti k dispozici tabulky, většinou se jim podaří objevit vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníku a příklad se zjednoduší na vyjádření ze vzorce.

Př. 4: Odvoď vzorec pro obsah pravidelného šestiúhelníku o straně *a*.



Pravidelný šestiúhelník je možné rozložit na šest stejných rovnostranných trojúhelníků o straně *a* (šestiúhelník je vepsán kružnici, je možné ho rozložit na šest stejných rovnoramenných trojúhelníků, jejich vrcholové úhly u středu šestiúhelníka jsou stejné a musí dát dohromady $360°$, každý z nich je tedy roven $60°$ a všechny trojúhelník jsou tedy rovnostranné).

$$S = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Př. 5: Urči obsah obecného trojúhelníka o stranách $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$. Urči délky všech jeho výšek.

Zadaný trojúhelník není pravoúhlý, nemá žádnou jinou speciální vlastnost $\Rightarrow$ nedokážeme spočítat výšku a nemůžeme použít vzorec $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ $\Rightarrow$ hledáme vzorec pro výpočet obsahu ze stran $\Rightarrow$ Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2}\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}\,\text{cm}^2 = 6\sqrt{6}\,\text{cm}^2 \doteq 14{,}7\,\text{cm}^2$$

Výšky můžeme určit pomocí vzorce pro výpočet obsahu (už ho známe).

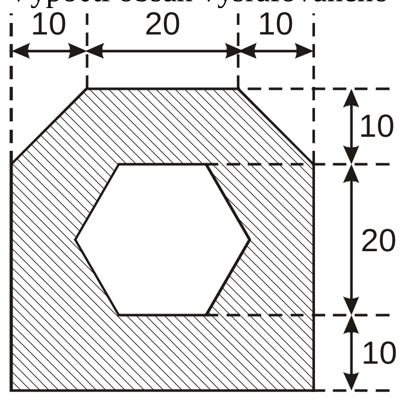
$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow v_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{5}\,\text{cm} = \frac{12\sqrt{6}}{5}\,\text{cm} \doteq 5{,}9\,\text{cm}$$

Podobně i zbývající výšky: $v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{6}\,\text{cm} = 2\sqrt{6}\,\text{cm} \doteq 4{,}9\,\text{cm}$

$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{7}\,\text{cm} = \frac{12}{7}\sqrt{6}\,\text{cm} \doteq 4{,}2\,\text{cm}$$

Pedagogická poznámka: Více než polovina studentů má problémy při určování výšek. Automaticky se zadání snaží vyřešit pomocí vět pro pravoúhlý trojúhelník a ani je nenapadne uvažovat o použití vzorce pro obsah (mají ho v paměti zařazený zcela jednosměrně jako cestu k počítání obsahu).

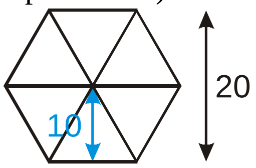
Př. 6: Vypočti obsah vyšrafovaného obrazce (vzdálenosti jsou udané v cm):



Obrazec je tvořen čtvercem 40cm x 40cm, ze kterého jsou vyříznuty tři kusy:

- dva pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami 10cm a 10cm. Dohromady tvoří čtverec 10cm x 10cm
- pravidelný šestiúhelník o výšce 20 cm

odečtením ploch výřezů od plochy velkého čtverce získáme výsledek pro určení plochy šestiúhelníku musíme znát jeho stranu (vzorec pro obsah jsme odvodili v příkladu 3)



Pokud je výška celého šestiúhelníku 20 cm, rovná se výška rovnostranných trojúhelníků, ze kterých je složen, 10 cm $\Rightarrow$ dosazením do vztahu pro výšku určíme stranu šestiúhelníku:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} v = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{cm}$$

$$S = S_1 - S_2 - S_3 = 40^2 - 10^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 \text{cm} = 1600 - 100 - 200\sqrt{3}\,\text{cm} = 100\left(15 - 2\sqrt{3}\right)\text{cm}$$

$$S \doteq 1154\,\text{cm}^2$$

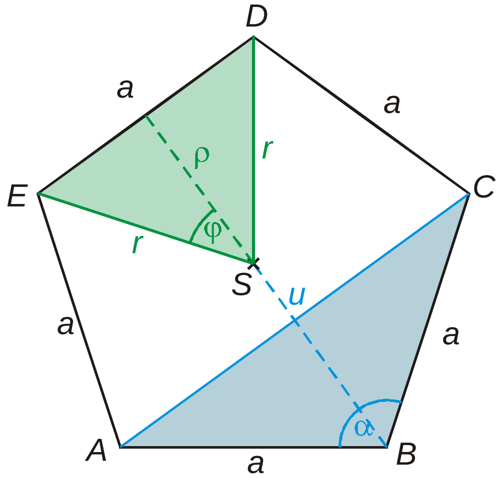
Vyšrafovaný obrazec má přibližně povrch $1154\,\text{cm}^2$.

Př. 7: Urči obvod a obsah pravidelného pětiúhelníku, má-li jeho nejkratší úhlopříčka délku 10 cm.

Obvod pravidelného pětiúhelníku: $o = na = 5a$

Obsah pravidelného pětiúhelníku: $S = n\frac{a\rho}{2} = \frac{5}{2}a\rho$

$\Rightarrow$ musíme ze zadaného údaje určit délku strany a poloměr kružnice vepsané.



Určení strany *a* z rovnoramenného trojúhelníku *ABC*:

Součet vnitřních úhlů v pětiúhelníku: $(n-2)\cdot 180° = (5-2)\cdot 180° = 540°$

Velikost úhlu α: $\frac{540°}{5} = 108°$

Úsečka *BS* dělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s úhlem $\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{u}{2}}{a} \Rightarrow a = \frac{u}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{10}{2\cdot\sin\frac{108°}{2}}\text{cm} \doteq 6{,}18\,\text{cm}$$

Určení poloměru kružnice vepsané z trojúhelníku *EDS*:

Úhel ESD je pětinou plného úhlu: $\sphericalangle ESD = \frac{360°}{5} = 72°$.

Přímka BS dělí rovnoramenný trojúhelník EDS na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky $\Rightarrow$

$$\varphi = \frac{\sphericalangle ESD}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{a}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{6{,}18}{2\cdot \operatorname{tg}36°}\,\text{cm} \doteq 4{,}25\,\text{cm}$$

Dosazení do vzorců:

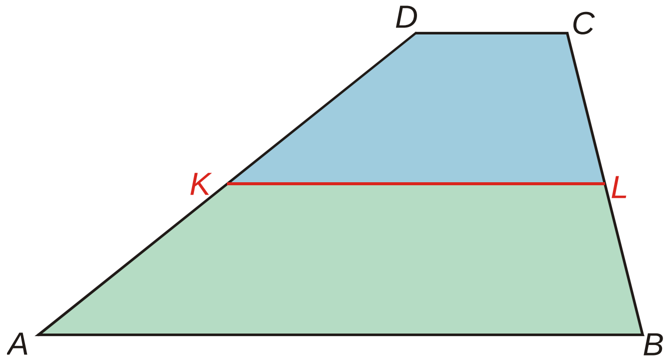
Obvod: $o = na = 5a = 5\cdot 6{,}18\,\text{cm} = 30{,}9\,\text{cm}$

Obsah: $S = n\frac{a\rho}{2} = \frac{5}{2}a\rho = \frac{5}{2}6{,}18\cdot 4{,}25\,\text{cm}^2 = 65{,}7\,\text{cm}^2$

Pravidelný pětiúhelník s nejkratší úhlopříčkou o délce 10 cm, má obvod 30,9 cm a obsah $65{,}7\,\text{cm}^2$.

Př. 8: Střední příčka rozdělí lichoběžník na dva menší lichoběžníky. Urči poměr jejich obsahů.

Obsah lichoběžníku: $S = \frac{(a+c)v}{2}$



Střední příčka je průměrem obou základen: $s = \frac{a+c}{2}$.

Modrý lichoběžník: $S_m = \frac{(s+c)\frac{v}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{a+c}{2}+c\right)v}{4} = \frac{\left(\frac{a+3c}{2}\right)v}{4} = \frac{(a+3c)v}{8}$.

Zelený lichoběžník: $S_z = \frac{(a+s)\frac{v}{2}}{2} = \frac{\left(a+\frac{a+c}{2}\right)v}{4} = \frac{\left(\frac{3a+c}{2}\right)v}{4} = \frac{(3a+c)v}{8}$.

Poměr lichoběžníků: $\frac{S_m}{S_z} = \frac{\frac{(a+3c)v}{8}}{\frac{(3a+c)v}{8}} = \frac{a+3c}{3a+c}$.

Vzniklé lichoběžníky mají v obsahy v poměru $\frac{a+3c}{3a+c}$.

Shrnutí: