3.2.13 Obvody a obsahy obrazců II

Předpoklady: 030212

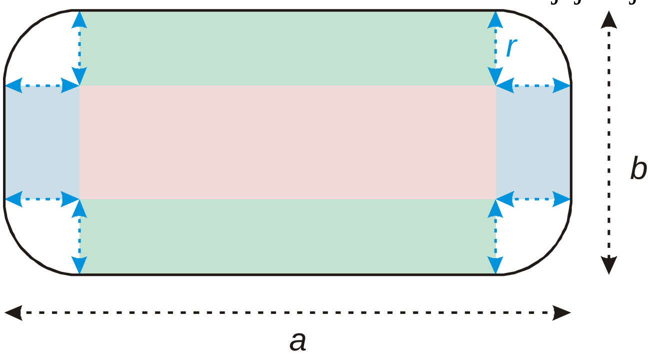
Pedagogická poznámka: Cílem hodiny je nácvik příkladů, kde je nutné výslednou plochu získat jako součet nebo rozdíl jiných snáze určitelných ploch. Ve všech příkladech je tak nutné nakreslit obrázek a nad ním hledat postup.

Př. 1: Vypočti poloměr kruhu jehož obsah i obvod je roven stejnému číslu.

Obsah kruhu $S = \pi r^2$, obvod kruhu $o = 2\pi r$.
Platí: $S = o$
$\pi r^2 = 2\pi r$
$r = 2$
Pro kruh o poloměru 2 platí, že jeho obsah i obvod se rovnají stejnému číslu.

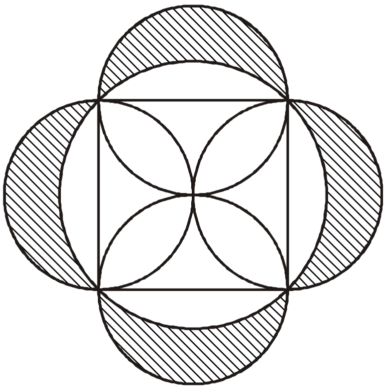
Př. 2: Urči plochu obdélníkového stolu o rozměrech *a*, *b*, jestliže stůl je v každém roku zaoblen do kruhu o poloměru *r*.

Nakreslíme si obrázek stolu a rozdělíme si jej na jednoduché útvary.

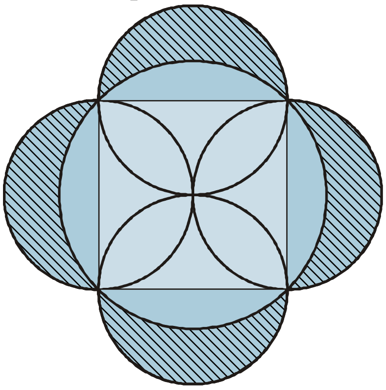


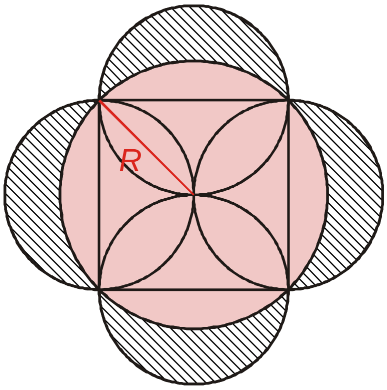
Určíme velikosti ploch vybarvených jednou barvou.
Červený obdélník
Strany: $(a-2r)$ a $(b-2r)$ $\Rightarrow$ $S_1 = ab = (a-2r)(b-2r) = ab - 2r(a+b) + 4r^2$
Dva zelené obdélníky
Strany: $(a-2r)$ a r $\Rightarrow$ $S_2 = 2ab = 2(a-2r)r = 2ar - 4r^2$
Dva modré obdélníky
Strany: $(b-2r)$ a r $\Rightarrow$ $S_3 = 2ab = 2(b-2r)r = 2br - 4r^2$
Čtyři modré čtvrtkruhy (dohromady jeden kruh)
Poloměr r $\Rightarrow$ $S = \pi r^2$
Celkem: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = ab - 2r(a+b) + 4r^2 + 2ar - 4r^2 + 2br - 4r^2 + \pi r^2$
$S = ab - 4r^2 + \pi r^2$
Plocha stolu se rovná $ab - 4r^2 + \pi r^2$.

Př. 3: Čtverci o straně a je opsána kružnice. Ve středu každé ze stran je střed další kružnice o poloměru $\frac{a}{2}$. Urči obsah měsíčků, které vzniknou nad každou ze stran.



Vyšrafovanou plochu můžeme určit tím, že od modré plochy (čtverec a čtyři menší půlkruhy) odečteme plochu většího kruhu.





Čtverec: $S_1 = a^2$.

Menší kruh: $S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

Modrá plocha (čtverec a dva menší kruhy): $S_m = a^2 + 2 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$.

Poloměr většího kruhu je roven polovině úhlopříčky čtverce: $R = \frac{u}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

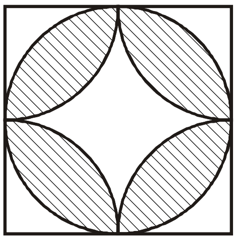
Větší kruh: $S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi 2a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{2}$.

Vyšrafovaná plocha: $S = S_m - S_3 = a^2 + \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} = a^2$.

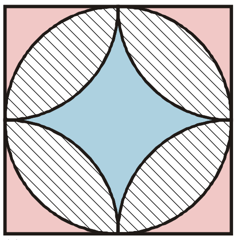
Obsah vyšrafované plochy se rovná a^2.

Př. 4: Čtverci *ABCD* o straně a je vepsán kruh k. Dále jsou ve všech jeho vrcholech sestrojeny čtvrtkruhy o poloměrech $r = \frac{a}{2}$ zapadající dovnitř čtverce. Vypočti obsah útvaru, který vznikne jako průnik vepsaného kruhu a čtvrtkruhů.

Obrázek



Plochu čtverce můžeme rozdělit na tři části.



Červená plocha: Obsah čtverce bez obsahu vepsané kružnice $\Rightarrow$

$$S_c = a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \pi\frac{a^2}{4}.$$

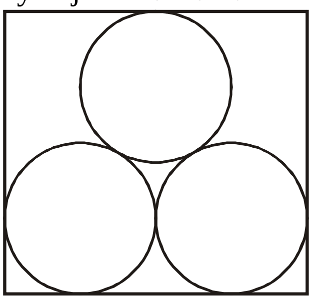
Modrá plocha: Obsah čtverce bez obsahu čtyř čtvrtkruhů o poloměru $\frac{a}{2}$ (tedy jednoho kruhu o poloměru $\frac{a}{2}$) $\Rightarrow$ $S_m = a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \pi\frac{a^2}{4}$.

Vyšrafovaná plocha: Obsah čtverce bez modré a červené plochy $\Rightarrow$

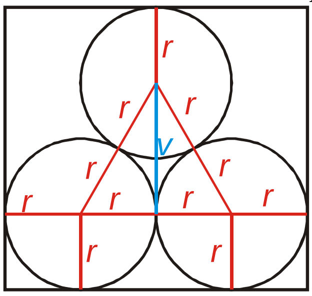
$$S = a^2 - S_c - S_m = a^2 - \left(a^2 - \pi\frac{a^2}{4}\right) - \left(a^2 - \pi\frac{a^2}{4}\right) = 2\pi\frac{a^2}{4} - a^2 = \pi\frac{a^2}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Vzniklý útvar má plochu $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Př. 5: Urči rozměry gumičky, ze které je možné vystřihnout způsobem nakresleným na obrázku tři kruhová těsnění o poloměru r. Jaká část původního množství gumy se využije na těsnění?



Dokreslíme do obrázku poloměry těsnění (ke všem bodům dotyku kružnic).



Z obrázku vidíme, že původní guma je obdélník, pro který platí:

- vodorovná stran má délku $4r$,
- svislá strana má délku $2r+v$, kde v je výška v rovnostranném trojúhelníku.

Z Pythagorovy věty platí: $(2r)^2 = v^2 + r^2$

$v^2 = 4r^2 - r^2$

$v^2 = 3r^2$

$v = r\sqrt{3} \Rightarrow$ svislá strana má délku $\left(2+\sqrt{3}\right)r$.

Obsah obdélníka: $S = ab = 4r \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)r = 4r^2\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Obsah tří těsnění: $S = 3 \cdot \pi r^2$.
Určení části použité na těsnění.

100% ... $4r^2\left(2+\sqrt{3}\right)$

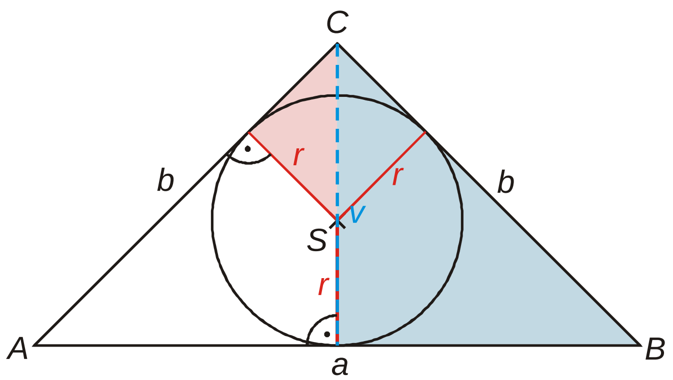
x% ... $3\pi r^2$

$$\frac{x}{100} = \frac{3\pi r^2}{4r^2\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{3\pi}{4\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$x = \frac{3\pi}{4\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot 100\,\% \doteq 63\,\%$$

Gumička má rozměry $\left(2+\sqrt{3}\right)r$ x $4r$, na těsnění využijeme 63% původního materiálu.

Př. 6: Urči poloměr kružnice vepsané rovnoramennému trojúhelníku se základnou *a* a ramenem *b*.



Vyznačíme do obrázku poloměry kružnice v místech doteku se stranami trojúhelníka. A s jejich pomocí hledáme pravoúhlé trojúhelníky:
Našli jsme dva podobné pravoúhlé trojúhelníky, z jejich podobnosti vyplývá:

$$\frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a} = \frac{v-r}{r}.$$

Upravujeme: $2br = a(v-r)$.

$2br + ar = av$

$r = \dfrac{av}{2b+a} \Rightarrow$ zbývá určit výšku na základnu: $b^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + v^2$

$v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

Dosadíme: $r = \frac{av}{2b+a} = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}{2b+a} = \frac{a\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}}}{2b+a} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b+2a}$.

Kružnice vepsaná rovnoramennému trojúhelníku se základnou *a* a ramenem *b* má poloměr $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b+2a}$.

Shrnutí: Hledanou plochu můžeme získat jakou součet nebo rozdíl jiných snáze určitelných ploch.