3.4.3 Množiny bodů dané vlastnosti I

Předpoklady: 3401

Některé z těchto množin už známe.

Jak je definována kružnice $k(S;r)$?

Množina všech bodů roviny, které mají od středu *S* vzdálenost *r*.
Předchozí věta znamená dvě věci:

- Vzdálenost každého bodu kružnice od středu *S* je rovna *r* (všechny body na kružnici mají zmiňovanou vlastnost).
- Každý bod v rovině, jehož vzdálenost od bodu *S*, leží na kružnici *k* (všechny body, které mají vlastnost leží na kružnici).

Uvedenou vlastnost kružnice můžeme zapsat i symbolicky: $k(S;r)=\{X \in \rho; |SX|=r\}$.

Kružnice $k(S;r)$ je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu *S* danou vzdálenost *r*. Symbolicky $k(S;r)=\{X \in \rho; |SX|=r\}$.

Stejným způsobem budeme postupovat i u dalších vlastností:
Množina *M* všech bodů roviny ρ, které mají danou vlastnost je množina bodů, pro kterou současně platí:

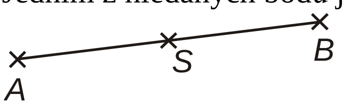
- **Každý bod množiny *M* má danou vlastnost.**
- **Každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny *M*.**

$\Rightarrow$ pokud bychom chtěli o kružnici dokázat, že je množinou všech bodů…, museli bychom dokazovat platnost obou předchozích vět.

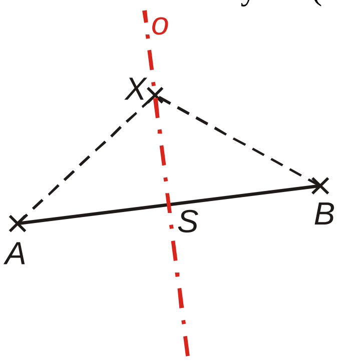
Dodatek: V mnoha případech se místo druhé podmínky dokazuje ekvivalentní podmínka „každý bod, který do množiny *M* nepatří, nemá danou vlastnost“.

Př. 1: Urči množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodů *A*, *B*.

Jedním z hledaných bodů je určitě střed úsečky.



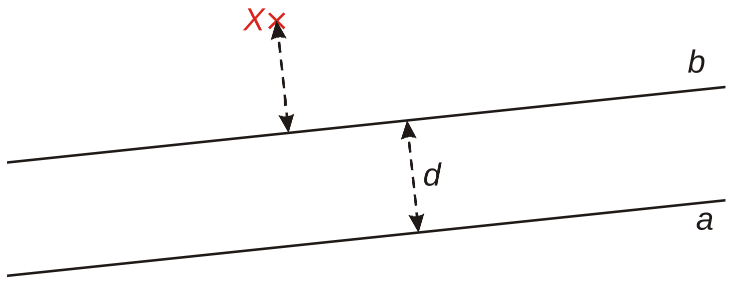
Další body můžeme získat jako vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se základnou *AB* $\Rightarrow$ získáme osu úsečky *AB* (kolmici na úsečku *AB*, procházející jejím středem)



Symbolicky píšeme: $o = \{X \in \rho; |AX| = |BX|\}$

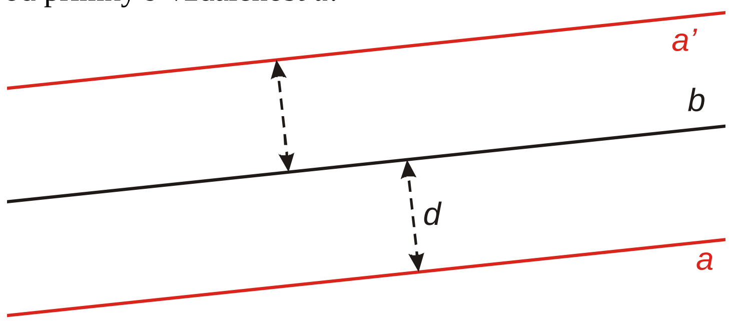
Osa úsečky *AB* je množina všech bodů roviny, které mají od daných bodů *A*, *B* stejnou vzdálenost. Symbolicky $o = \{X \in \rho; |AX| = |BX|\}$.

Př. 2: Je dána přímka *b*. Rozhodni, zda množinou všech bodů, které mají od přímky *b* vzdálenost $d > 0$, je přímka *a* mající od přímky *b* vzdálenost *d*.



V rovině existují body (například bod *X*), které mají od přímky *b* vzdálenost *d* a při tom neleží na přímce *a* $\Rightarrow$ přímka *a* není množinou všech bodů, které mají od přímky *b* vzdálenosti *d*.

Množinou bodů, které mají od přímky *b* vzdálenost $d > 0$ je dvojice přímek a, a', které mají od přímky *b* vzdálenost *d*.

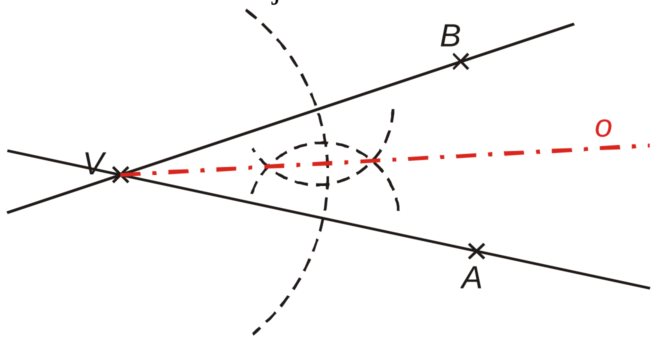


Symbolicky píšeme: $a \cup a' = \{X \in \rho; |Xb| = d\}$.

Pedagogická poznámka: Výzvu, aby studenti správnou množinu bodů z předchozího příkladu objevili, zadání neobsahuje schválně. Studenty vyzývám ústně ihned potom, co se shodnou, že samotná přímka *a* takovou hledanou množinou není.

Př. 3: Urči množinu všech bodů daného konvexního úhlu *AVB*, které mají stejnou vzdálenost od přímek, na nichž leží jeho ramena.

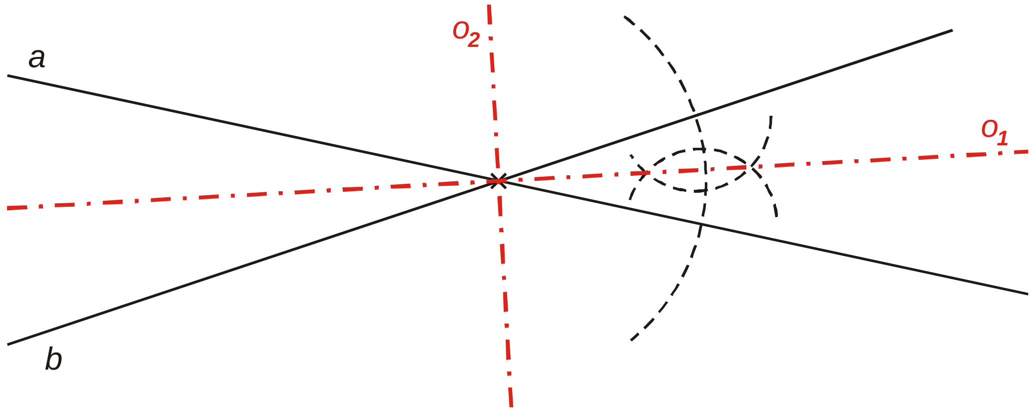
Hledanou množinou je osa konvexního úhlu *AVB*.



Symbolicky píšeme: $o = \{ X \in \sphericalangle AVB; |X \leftrightarrow VA| = |X \leftrightarrow VB| \}$.

Př. 4: Urči množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek *a*, *b*.

Dvě různoběžky rozdělí rovinu na čtyři konvexní úhly. Jejich osy tvoří dohromady dvě přímky o_1, o_2, které jsou navzájem kolmé. Sjednocení těchto přímek tvoří množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od různoběžných přímek *a*, *b*.

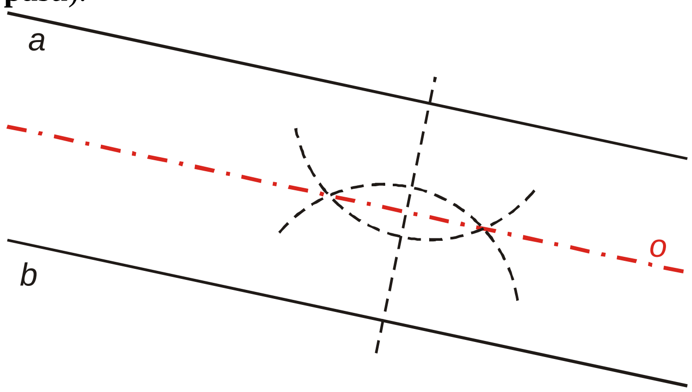


Symbolicky píšeme: $o_1 \cup o_2 = \{ X \in \rho; |Xa| = |Xb| \}$

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že nezanedbatelná část studentů kreslí různoběžky v takové poloze, že jejich obrázek neobsahuje průsečík. V takových situacích se bavíme o tom, že obrázek by měl obsahovat „zajímavé rysy situace„, což u různoběžek bezesporu znamená průsečík.
Část studentů samozřejmě zapomene jednu z os, většinou osu o_2 (ostřejší úhel více připomíná minulý příklad).

Př. 5: Urči množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých rovnoběžných přímek *a*, *b*.

Všechny body, které mají stejnou vzdálenost od dvou různých rovnoběžných přímek *a*, *b* musí ležet „uprostřed mezi oběma rovnoběžkami“ a tvoří přímku *o* (někdy nazývanou **osa pásu**).

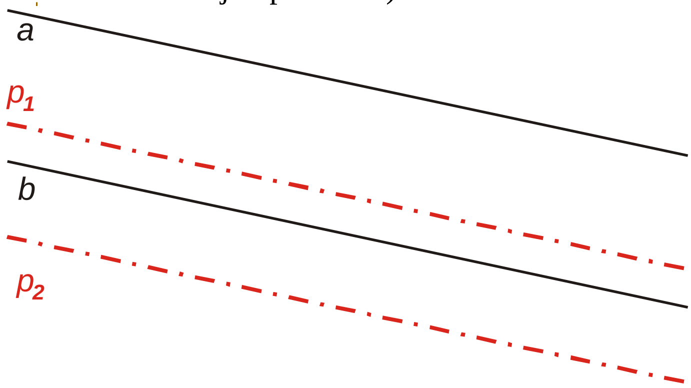


Symbolicky píšeme: $o = \{ X \in \sphericalangle \rho; |Xa| = |Xb| \}$.

Př. 6: Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky *a*, *b*. Urči množinu všech bodů, které mají od přímky *a* třikrát větší vzdálenost než od přímky *b*.

Hledanou množinu tvoří dvě přímky rovnoběžné s *a*, *b*:

- přímka p_1 ležící mezi přímkami *a*, *b* (blíže k přímce *b*)
- přímka p_2 ležící „pod přímkou *b* (ležící v polorovině s hraniční přímkou *b* neobsahující přímku *a*)



Symbolicky píšeme: $p_1 \cup p_2 = \{X \in \sphericalangle\rho; |Xa| = 3 \cdot |Xb|\}$.

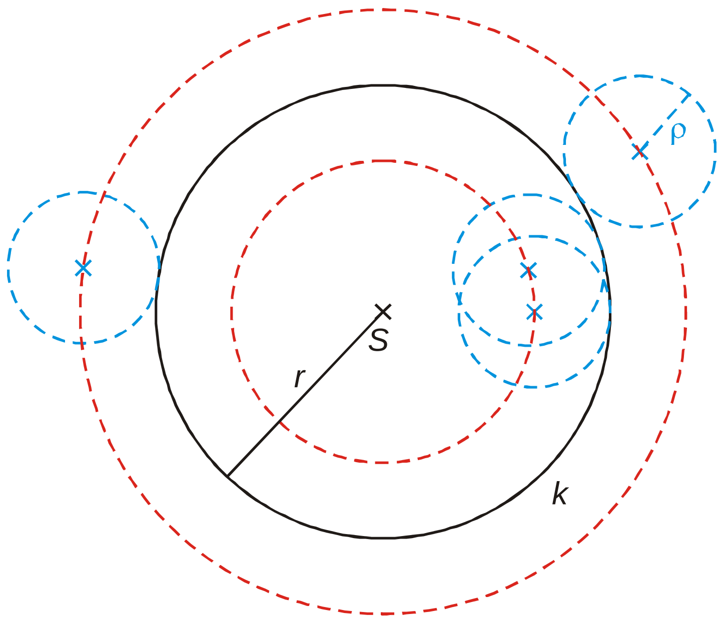
Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu provádíme synchronizaci třídy společnou kontrolou. Studenti často kreslí pouze jednu z obou přímek.

U všech dalších množin je důležité kreslit obrázky a zkoušet množinu objevit kreslením možných řešení.

Důležité: V zadání následujícího příkladu je uvedeno, že máme nalézt středy všech kružnic o poloměru ρ. Znamená to:

- **všechny kružnice, které budeme při řešení hledat (kreslit) musí mít stejný poloměr** (ρ)
- hodnota poloměru ρ není zadána a proto musíme promyslet, zda se řešení nebude měnit při změně hodnoty poloměru ρ

Př. 7: Urči množinu středů všech kružnic o poloměru ρ, které se dotýkají kružnice $k(S;r)$.

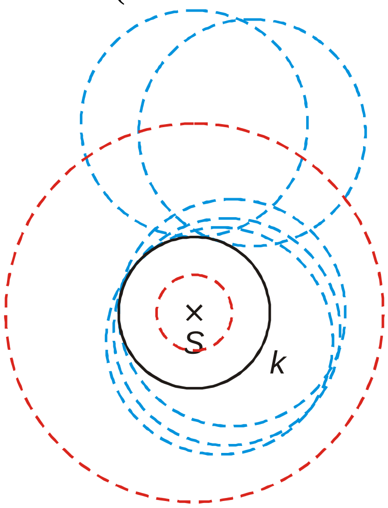


Z obrázku je zřejmé, že hledanou množinou je dvojice kružnic:

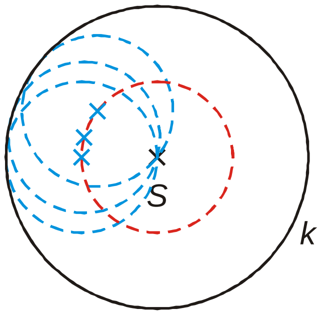
- $l(S;r+\rho)$ - větší červená kružnice
- $m(S;|r-\rho|)$ - menší červená kružnice

Pedagogická poznámka: Studenti často při kreslení zapomínají na kružnice poskládané vně kružnice *k*.

Při kontrole se studenti budou divit absolutní hodnotě ve výrazu pro poloměr kružnice *m*. Pokud je dost času, určitě stojí za to studentům zadat, aby nakreslili případ, ve kterém je nutné použít pro vyjádření poloměru kružnice *m* absolutní hodnotu (u nakresleného obrázku je to totiž zbytečné).

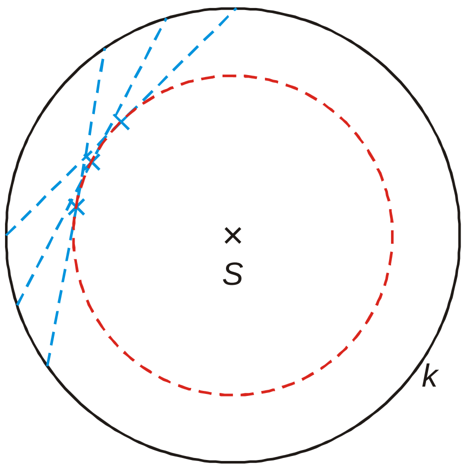


Př. 8: Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice $k(S;r)$ a procházejí bodem S.

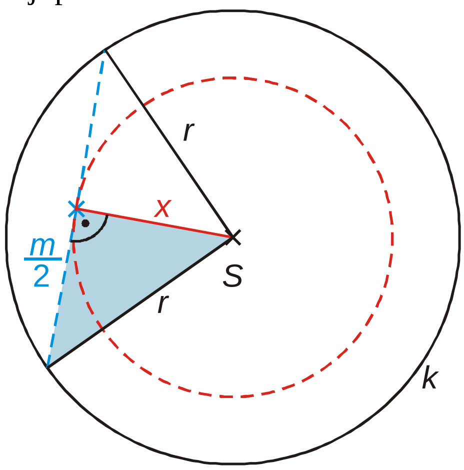


Z obrázku je vidět, že hledanou množinou bodů je kružnice $l\left(S;\frac{r}{2}\right)$.

Př. 9: Urči množinu středů všech tětiv kružnice $k(S;r)$, které mají danou délku $m<2r$.



Z obrázku je vidět, že hledanou množinou je kružnice se středem v bodě S.
Její poloměr určíme z obrázku:



Ve vyznačeném pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta:

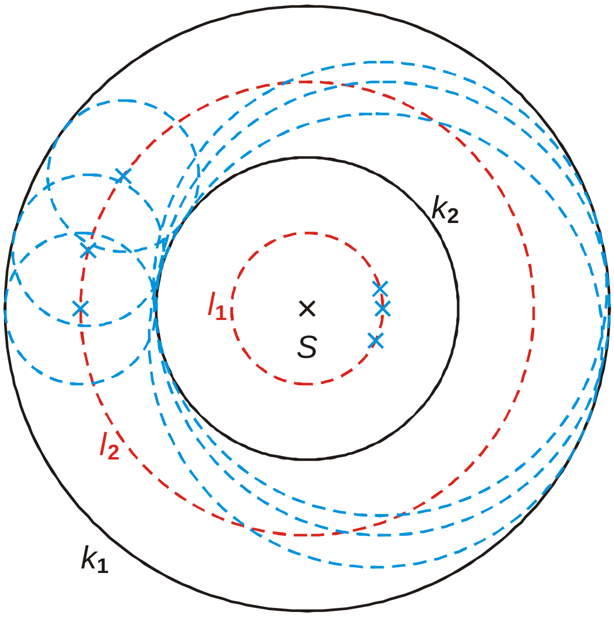
$$r^2=x^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$x=\sqrt{r^2-\frac{m^2}{4}}$

Hledanou množinou je kružnice $l\left(S;\sqrt{r^2-\frac{m^2}{4}}\right)$

Pedagogická poznámka: Na výpočtu poloměru netrvám.

Př. 10: Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dvou soustředných kružnic $k_1(S;r_1)$ a $k_2(S;r_2)$.



Z obrázku je zřejmé, že hledanou množinou bodů tvoří dvě kružnice:

- $l_1\left(S;\frac{r_1-r_2}{2}\right)$
- $l_2\left(S;\frac{r_1+r_2}{2}\right)$

Př. 11: Petáková:
strana 76/cvičení 1 b) d)

Shrnutí: