

3.4.5 Konstrukce trojúhelníků I

Předpoklady: 3404

U konstrukčních úloh rozeznáváme dva základní typy:

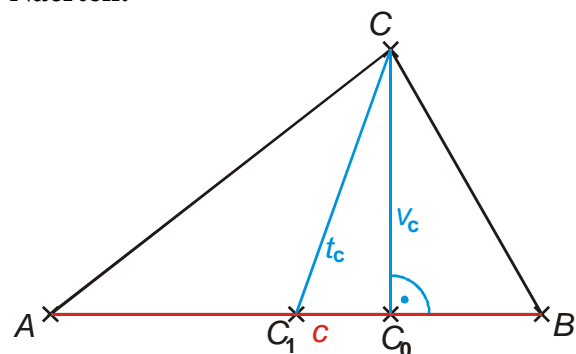
- **polohové úlohy:** jejich zadání většinou začíná slovy „Je dána ...“. Tato věta znamená, že konstrukci musíme začít prvkem, který je dán v úvodní větě.
- **nepolohové úlohy:** jejich zadání větu „Je dána...“ neobsahuje. Ze zadaných prvků si můžeme vybrat kterýkoliv a začít konstrukci od něj.

Ve všech případech je velmi vhodné začít řešení příkladů náčrtem, ve kterém zakreslíme známé prvky trojúhelníka, u polohových úloh pak vyznačíme prvek, kterým musíme začít.

Př. 1: Je dána úsečka AB , $|AB| = 6\text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky ABC se stranou AB , pro které platí $v_c = 4\text{ cm}$, $t_c = 6\text{ cm}$.

Polohová úloha \Rightarrow jako první rýsujeme úsečku AB .

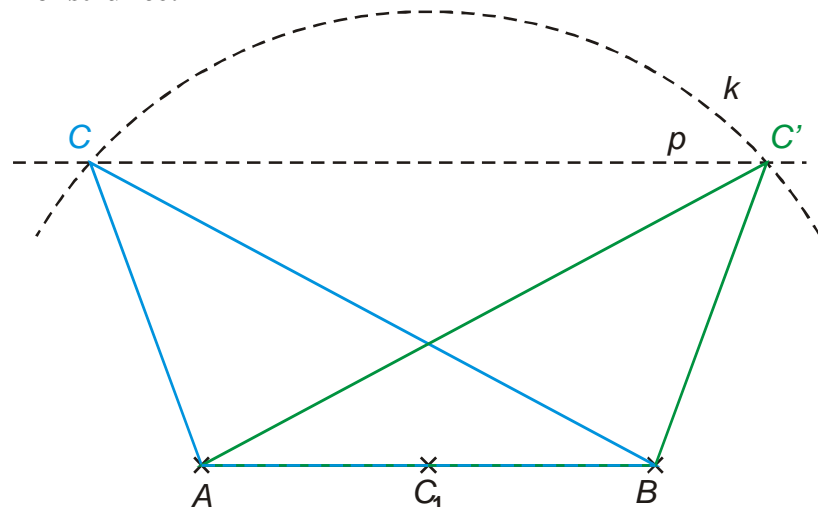
Náčrtek:



Hledáme vrchol C :

- známe výšku $v_c \Rightarrow$ bod C leží na rovnoběžce s úsečkou AB vzdálené o v_c ,
- známe těžiště $t_c \Rightarrow$ bod C leží na kružnici $k(C_1; t_c)$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

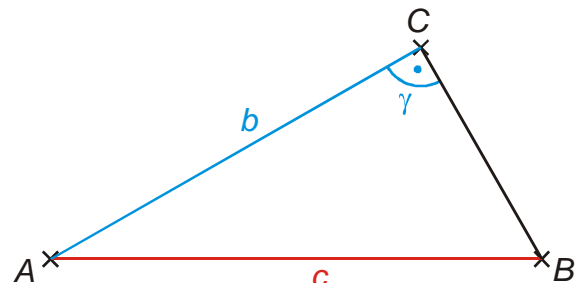
1. $AB; |AB| = c = 6\text{ cm}$
2. $p; p \parallel AB; |pAB| = 4\text{ cm}$
3. $C_1; C_1$ je střed AB
4. $k; k(C_1; t_c = 6\text{ cm})$
5. $C, C'; \{C, C'\} = k \cap p$
6. $\triangle ABC, \triangle ABC'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky p s kružnicí k .

Př. 2: Je dána úsečka AB , $|AB| = 6 \text{ cm}$. Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC se stranou AB a pravým úhlem γ , pro které platí $b = 5 \text{ cm}$.

Polohová úloha \Rightarrow jako první rýsujeme úsečku AB .

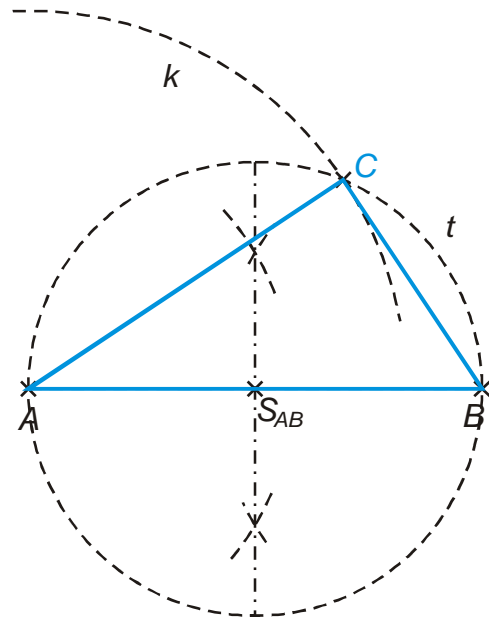
Náčrtek:



Hledáme vrchol C :

- známe stranu $b \Rightarrow$ bod C leží na kružnici $k(A; b)$,
- známe úhel $\gamma = 90^\circ \Rightarrow$ bod C leží na kružnici $t\left(S_{AB}; \frac{c}{2}\right)$ (Thaletova kružnice nad stranou c).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $AB; |AB| = c = 6 \text{ cm}$
2. $k; k(A; b = 5 \text{ cm})$
3. $t; t\left(S_{AB}; \frac{c}{2} = 3 \text{ cm}\right)$
4. $C; \{C\} = k \cap t$
5. $\triangle ABC$

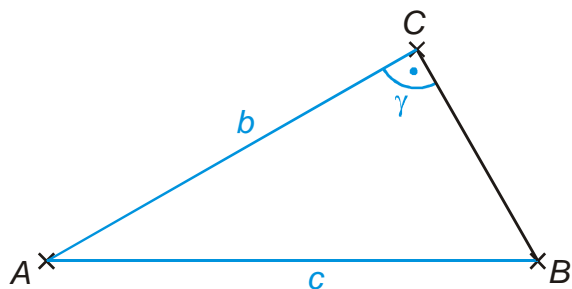
Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině žádné nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic k a t .

Pedagogická poznámka: Při kreslení náčrtků kontroluji, jestli jsou nakreslené trojúhelníky alespoň přibližně pravoúhlé.

Př. 3: Sestroj trojúhelník ABC , pro který platí $c = 6 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ a $\gamma = 90^\circ$.

Nepolohová úloha \Rightarrow můžeme zvolit prvek, který rýsujeme jako první.

Náčrtek:

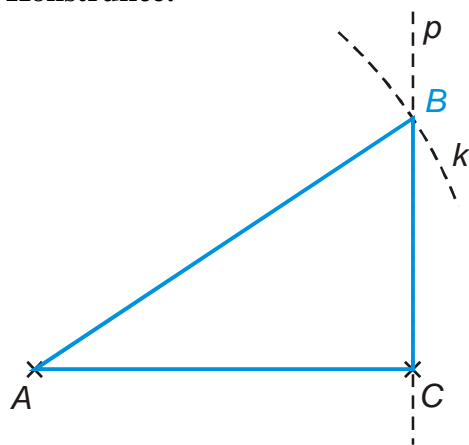


Pokud začneme od strany c , jde o stejnou úlohu jako v příkladě 2.

Začneme stranou $b \Rightarrow$ hledáme vrchol B :

- známe stranu $c \Rightarrow$ bod B leží na kružnici $k(A; c)$,
- známe úhel $\gamma = 90^\circ \Rightarrow$ můžeme narýsovat polopřímku CB .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $AC; |AC| = b = 5 \text{ cm}$
2. $k; k(A; c = 6 \text{ cm})$
3. $p; p \perp AC; C \in p$
4. $B; \{B\} = k \cap p$
5. $\triangle ABC$

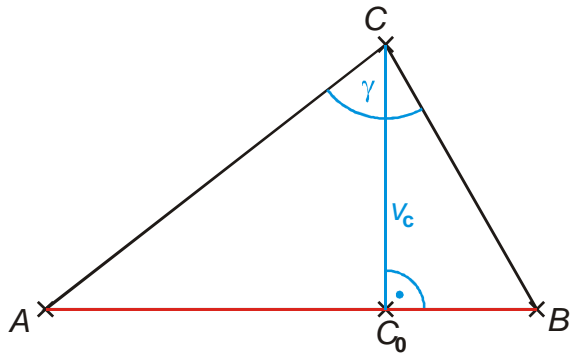
Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině žádné nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k a přímky p .

Pedagogická poznámka: Studentům, kteří jsou hodně napřed a myslí si, že příklad 3 je stejný jako příklad 2, říkám nejdříve, že to není pravda a nechám je přemýšlet samotné. Problém shodnosti obou příkladů pak řešíme s celou třídou, aby si všichni uvědomili rozdíl (v příkladu 2. je dáno, jak musíme začít, v příkladu 3 si můžeme celý postup zvolit. Pokud máme dost času, nechávám studenty rýsovat postup od strany b , jinak ihned přecházíme na další příklady.

Př. 4: Je dána úsečka AB , $|AB| = 6 \text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky ABC se stranou AB , pro které platí $v_c = 3 \text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$.

Polohová úloha \Rightarrow jako první rýsujeme úsečku AB .

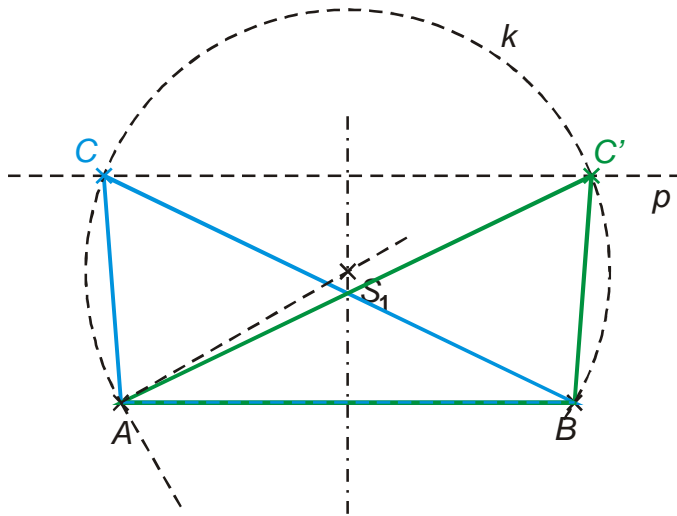
Náčrtek:



Hledáme vrchol C :

- známe výšku $v_c \Rightarrow$ bod C leží na rovnoběžce s úsečkou AB vzdálené o v_c ,
- známe úhel $\gamma = 60^\circ \Rightarrow$ bod C leží na množině bodů, ze které je úsečka AB vidět pod úhlem 60° .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

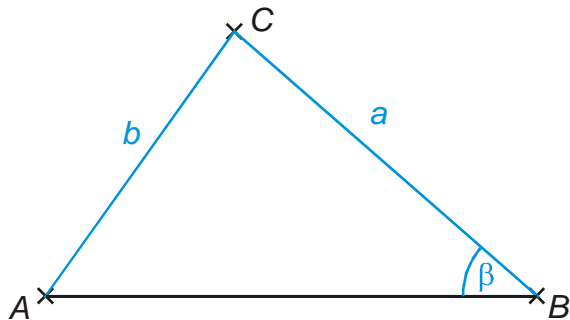
1. $AB; |AB| = c = 6 \text{ cm}$
2. $p; p \parallel AB; |pAB| = 3 \text{ cm}$
3. $k; k = \{X \in \mathbb{I} \rightarrow ABC; |\sphericalangle AXB| = 60^\circ\}$
4. $C, C'; \{C, C'\} = k \cap p$
5. $\triangle ABC, \triangle ABC'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky p s kružnicí k .

Př. 5: Sestroj trojúhelník ABC , pro který platí $a = 6 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ a $\beta = 50^\circ$. Najdi alespoň dva různé postupy konstrukce vycházející od dvou různých zadaných prvků a porovnej jejich výhodnost.

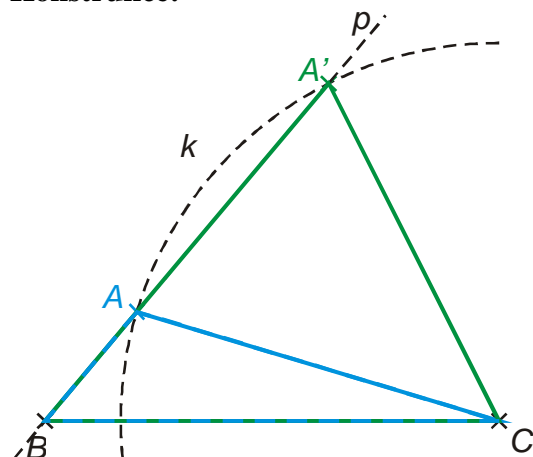
Nepolohová úloha \Rightarrow můžeme zvolit prvek, který rýsujeme jako první.

Náčrtek:



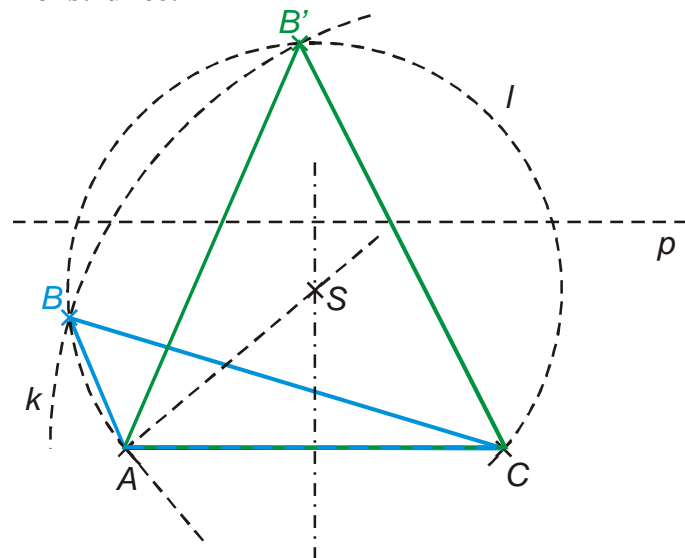
Začneme stranou $a \Rightarrow$ hledáme vrchol A :

- známe stranu $b \Rightarrow$ bod A leží na kružnici $k(C; b)$,
- známe úhel $\beta = 50^\circ \Rightarrow$ můžeme narýsovat polopřímku BA .

Konstrukce:

Začneme stranou $b \Rightarrow$ hledáme vrchol B :

- známe stranu $a \Rightarrow$ bod B leží na kružnici $k(C; a)$,
- známe úhel $\beta = 50^\circ \Rightarrow$ bod B leží na množině bodů, ze které je úsečka AC vidět pod úhlem 50° .

Konstrukce:**Zápis konstrukce:**

1. $BC; |BC| = a = 6 \text{ cm}$
2. $k; k(C; b = 5 \text{ cm})$
3. $p; |\sphericalangle p \leftrightarrow BC| = 50^\circ; B \in p$
4. $A, A'; \{A, A'\} = k \cap p$
5. $\triangle ABC, \triangle ABC'$

Zápis konstrukce:

1. $AC; |AC| = b = 5 \text{ cm}$
2. $k; k(C; a = 6 \text{ cm})$
3. $l; l = \{X \in \text{přm} \mid \sphericalangle ACX = 50^\circ\}$
4. $B, B'; \{B, B'\} = k \cap l$
5. $\triangle ABC, \triangle ABC'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky p s kružnicí k (případně kružnic k a l).

Pedagogická poznámka: Pokud si ukážete řešení obou možných postupů na tabuli, zkuste se zeptat studentů, jak je možné, že při prvním řešení mám dvě možnosti polohy bodu A , zatímco při druhém postupu dvě možnosti polohy bodu B , i přes to, že jde o řešení stejného příkladu.

Pedagogická poznámka: V hodině samozřejmě chci, aby studenti řešili příklad druhým (těžším) způsobem.

Dodatek: Předchozí příklad je možné řešit i umístěním úhlu β . Jde však o stejný postup jako v při umístění strany a .

Př. 6: Petáková:
strana 77/cvičení 17 c)
strana 77/cvičení 14 a)

Shrnutí: