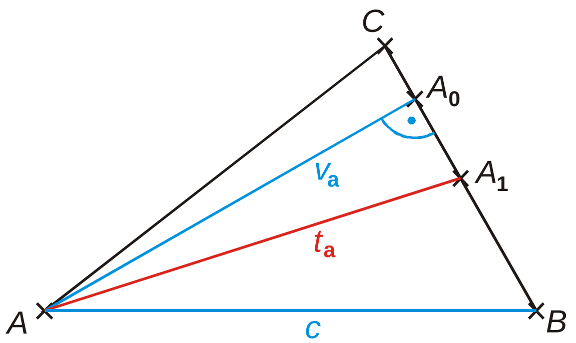
3.4.6 Konstrukce trojúhelníků II

Předpoklady: 3405

Př. 1: Je dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 5\,\text{cm}$. Narýsuj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které je úsečka AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $v_a = 4{,}5\,\text{cm}$ a $c = 5{,}5\,\text{cm}$.

Náčrtek:

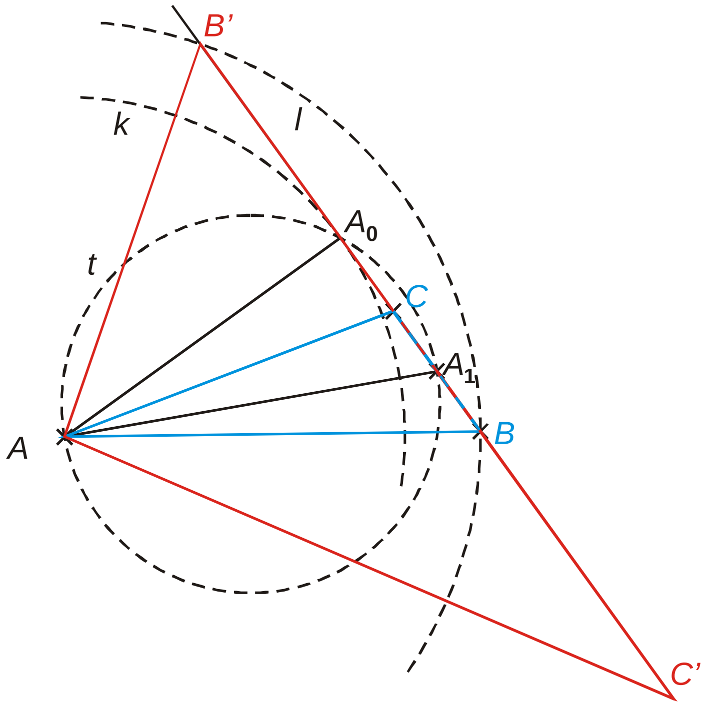


Úloha je polohová, začínáme úsečkou AA_1.

Problém: Všechny tři známé úsečky vycházejí z jednoho bodu.

Řešení: Nejdříve sestrojíme trojúhelník AA_1A_0. Je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A_0. Tím určíme přímku *BC* a na této přímce pak najdeme bod *B*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

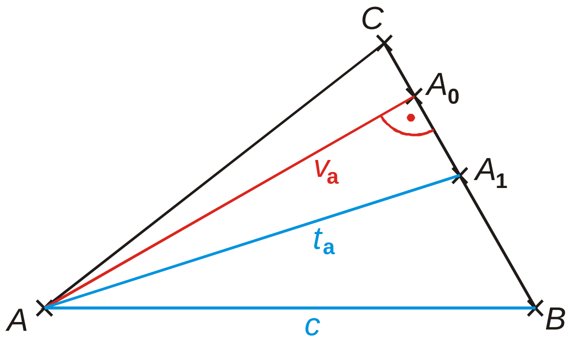
1. $AA_1; |AA_1| = t_a = 5\,\text{cm}$
2. $t; t\left(S_{AA_1}; 2{,}5\,\text{cm}\right)$
3. $k; k\left(A; 4{,}5\,\text{cm}\right)$
4. $A_0; k \cap t = A_0$
5. $\leftrightarrow A_1A_0$
6. $l; l\left(A; 5{,}5\,\text{cm}\right)$
7. $B, B'; \{B, B'\} = l \cap A_1A_0$
8. C, C'
9. $\Delta ABC, \Delta AB'C'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky *BC* s kružnicí *l*.

Pedagogická poznámka: Příklad je nutné nechat studenty narýsovat. Obrovská většina studentů najde při konstrukci pouze bod *B* (modrý trojúhelník). Druhý průsečík kružnice *l* s přímkou A_1A_0 už nenajdou. Bavíme se o tom, že doporučení kreslit z pomocných kružnic pouze potřebné oblouky není absolutní a před každým podobným ulehčením si musí představit, jak by situace vypadala, kdyby kružnici kreslili celou.

Př. 2: Je dána úsečka AA_0, $|AA_0| = 5\,\text{cm}$. Narýsuj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $c = 5{,}5\,\text{cm}$, $t_a = 6\,\text{cm}$ a úsečka AA_0 je výškou na stranu *a*.

Náčrtek:



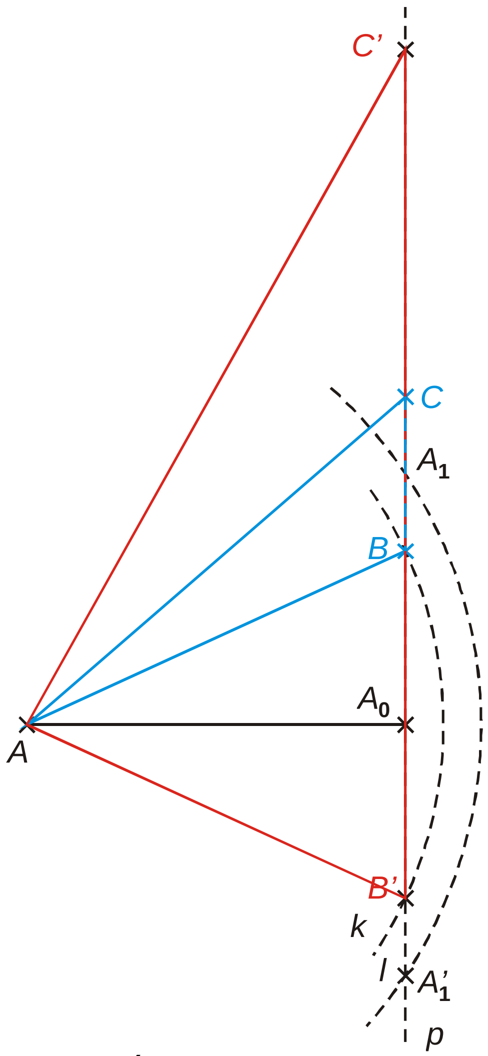
Úloha je polohová, začínáme úsečkou AA_0.

Řešení: Známe úsečku AA_0, sestrojíme k ní kolmou přímku *BC*, na ní najdeme body *B*, A_1 a s jejich pomocí pak bod *C*.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

1. $AA_0; |AA_0| = v_a = 5\,\text{cm}$
2. $p; p \perp AA_0, A_0 \in p$
3. $k; k(A; 5{,}5\,\text{cm})$
4. $B, B'; \{B, B'\} = k \cap p$
5. $l; l(A; 6\,\text{cm})$
6. $A_1, A_1'; \{A_1, A_1'\} = l \cap p$
7. $C; C \in p, |CA_1| = |BA_1|$
8. $C'; C' \in p, |C'A_1| = |B'A_1|$
9. $\Delta ABC, \Delta AB'C'$

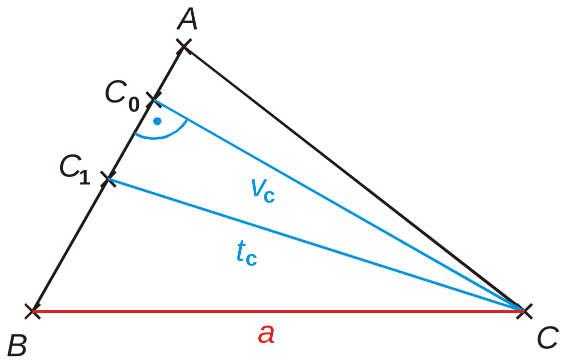


Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky *p* s kružnicemi *k*, *l*. Bod A_1' nevyužíváme, protože bychom s jeho pomocí získali pouze osové obrazy trojúhelníků *ABC* a $AB'C'$ podle osy AA_0.

Pedagogická poznámka: Opět se opakuje problém s nalezením obou trojúhelníků. Někteří studenti najdou naopak čtyři (obě řešení v horní a jejich obrazy v dolní polorovině).

Př. 3: Je dána úsečka BC, $|BC| = 5\,\text{cm}$. Narýsuj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí $v_c = 4,5\,\text{cm}$ a $t_c = 5\,\text{cm}$.

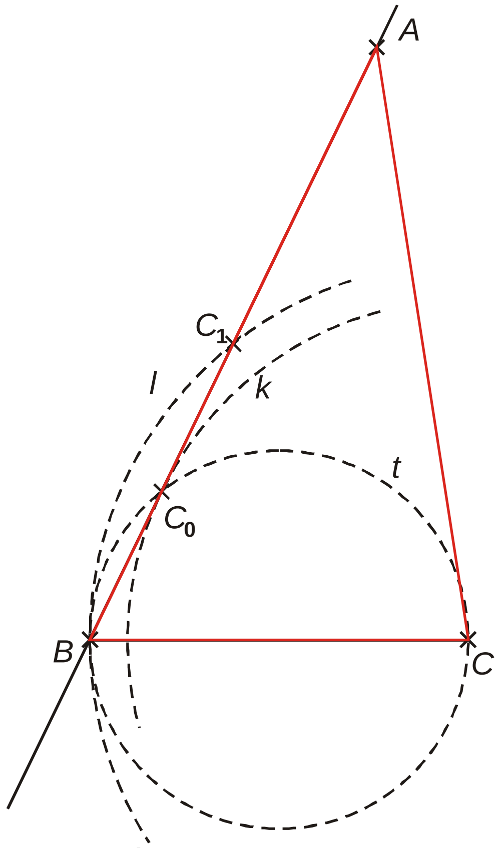
Náčrtek:



Úloha je polohová, začínáme úsečkou BC.

Řešení: Příklad je podobný prvnímu příkladu, opět nemůžeme nakreslit rovnou trojúhelník *ABC*, ale musíme začít od trojúhelníku BCC_0 (známe v něm dvě strany a úhel). Pomocí těžnice pak určíme bod C_1 a pak bod *A*.

Konstrukce:



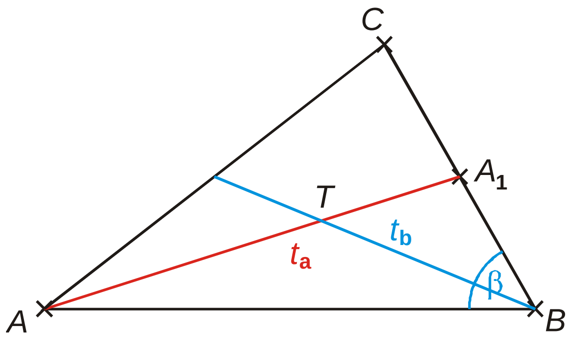
Zápis konstrukce:

1. $BC; |BC| = a = 5\,\text{cm}$
2. $t; t\left(S_{BC}; 2{,}5\,\text{cm}\right)$
3. $k; k\left(C; 4{,}5\,\text{cm}\right)$
4. $C_0; k \cap t = C_0$
5. $\leftrightarrow BC_0$
6. $l; l\left(C; 5\,\text{cm}\right)$
7. $C_1; C_1 = l \cap BC_0, C_1 \neq B$
8. A
9. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky BC_0 s kružnicí *l*. (V našem případě jsou průsečíky dva, ale jeden z nich leží v bodě *B* nemůže tedy být patou těžnice t_c)

Př. 4: Je dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 6\,\text{cm}$. Narýsuj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které je úsečka AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $\beta = 70°$ a $t_b = 3{,}9\,\text{cm}$.

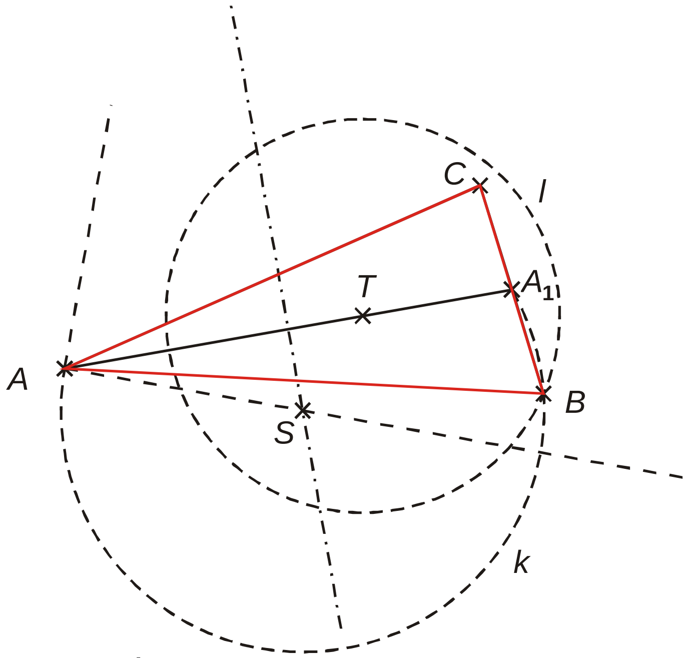
Náčrtek:



Úloha je polohová, začínáme úsečkou AA_1.
Řešení pomocí množin bodů: Vrchol *B* leží na:

- množině bodů, ze kterých je úsečka AA_1 vidět pod úhlem $70°$,
- kružnice se středem v těžišti trojúhelníka a poloměrem $\frac{2}{3}t_b$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $AA_1; |AA_1| = t_a = 6\,\text{cm}$
2. $k; k \subset \{X \in \rho; |\sphericalangle AXA_1| = 70°\}$
3. $T; T \in AA_1, |AT| : |TA_1| = 2:1$
4. $l; l(T; 2{,}6\,\text{cm})$
5. $B; B = l \cap k$
6. ΔABC

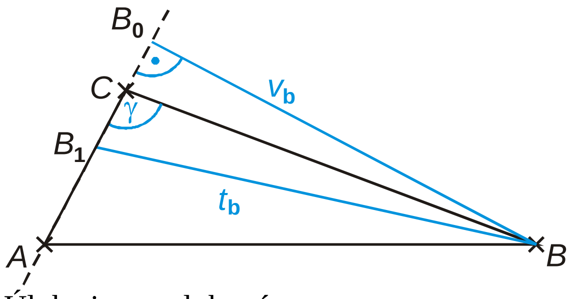
Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic *k* a *l*.

Pedagogická poznámka: Nezanedbatelná část studentů dělá při konstrukci předchozího příkladu stejnou chybu. Sestrojí množinu bodů pomocí kružnice *k* a bod *B* najdou jako průsečík polopřímky *AS* a kružnicí *k*. Tato konstrukce nemá žádné alespoň zdánlivě logické vysvětlení. Jde zřejmě pouze o ztrátu přehledu o příkladu (a taky podvědomou touhu použít přímku *SA* na „něco pořádného“).

Pedagogická poznámka: Následující příklady je samozřejmě nemožné stihnout ve zbytku hodiny. Nechám studentům projít zadání a pak si projdeme postupy jednotlivých konstrukcí. Pokud zbude čas, mohou si libovolnou z nich narýsovat.

Př. 5: Sestroj trojúhelník *ABC*, pro který platí $\gamma = 110°$, $t_b = 5\,\text{cm}$ a $v_b = 4\,\text{cm}$.

Náčrtek:

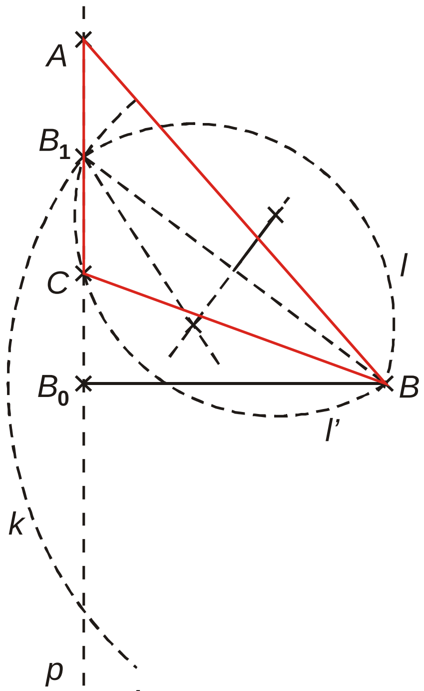


Úloha je nepolohová.

Řešení: Sestrojíme trojúhelník BB_1B_0 (jako první narýsujeme úsečku BB_0). Vrchol C leží na:

- množině bodů, ze kterých je úsečka BB_1 vidět pod úhlem $110°$ (případně úsečka BB_0 pod úhlem $70°$),
- přímce B_0B_1.

Konstrukce:

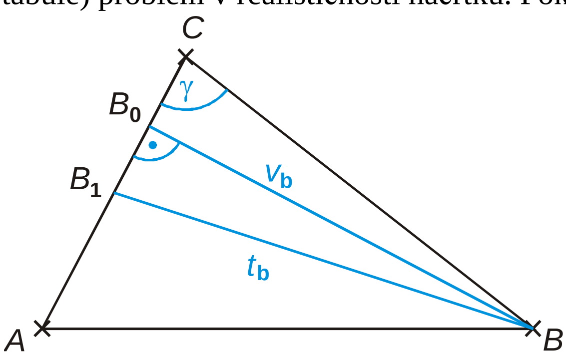


Zápis konstrukce:

1. $BB_0; |BB_0| = v_b = 4\,\text{cm}$
2. $p;\ p \perp BB_0, B_0 \in p$
3. $k; k(B; t_b = 5\,\text{cm})$
4. $B_1; B_1 = k \cap p$
4. $l, l'; l \cup l' = \{X \in \rho; |\sphericalangle BXB_1| = 110°\}$
5. $C; C = (l \cup l') \cap p$
6. A;
7. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k s přímkou p (druhý nepopsaný průsečík nevede na další řešení, pouze na stejné řešení v opačné polorovině.).

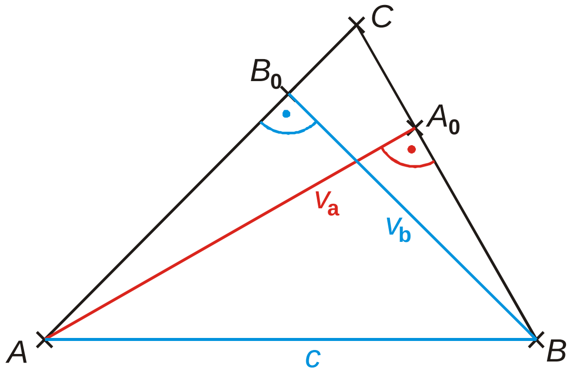
Pedagogická poznámka: U některých žáků může být (v případě, že nekopírují obrázek z tabule) problém v realističnosti náčrtku. Pokud jej nakreslí takto:



může se jim zdát (a já je v tom záměrně podporuji), že hledají bod C pomocí množiny bodů, ze kterých je úsečka BB_0 vidět pod úhlem $110°$, což samozřejmě nejde. Pokud někdo na tento problém narazí (příklad je pro něj neřešitelný, ostatní ho mají), stává se z hledání chyby úkol pro celou třídu.

Př. 6: Je dána úsečka AA_0, $|AA_0| = 5\,\text{cm}$. Narýsuj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $c = 7\,\text{cm}$, $v_b = 2\,\text{cm}$ a úsečka AA_0 je výškou na stranu *a*.

Náčrtek:



Úloha je polohová, začínáme úsečkou AA_0.

Řešení: Začneme trojúhelníkem AA_0B (známe v něm dvě strany a úhel). Bod B_0 leží na:

- množině bodů, ze kterých je vidět úsečka AB pod úhlem $90°$ (Thaletova kružnice),
- kružnice se středem *B* a poloměrem $v_b = 2\,\text{cm}$.

Bod *C* leží na průsečíku přímek BA_0 a AB_0.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

$1. AA_0; |AA_0| = v_a = 5\,\text{cm}$

$2. p; p \perp AA_0, A_0 \in p$

$3. k; k(A; c = 7\,\text{cm})$

$4. B, B'; \{B, B'\} = k \cap p$

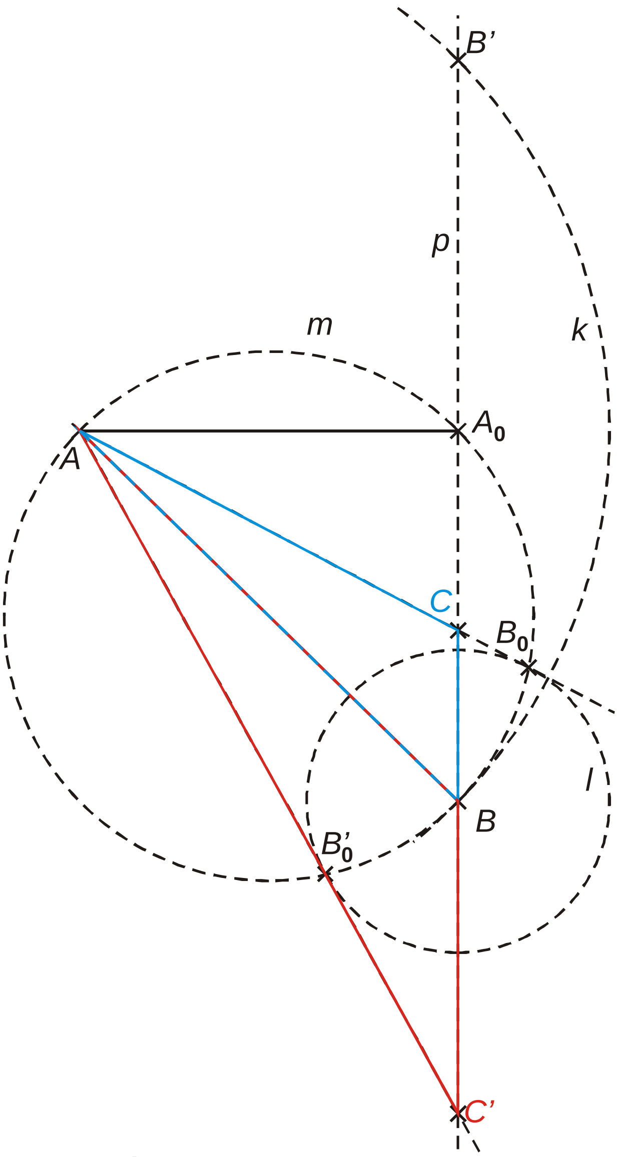
$5. l; l(B; v_b = 2\,\text{cm})$

$4. m; m \supset \{X \in \rho; |\sphericalangle AA_0B| = 90°\}$

$6. B_0, B_0'; \{B_0, B_0'\} = l \cap m$

$7. C, C'$

$8. \Delta ABC, \Delta AB'C'$

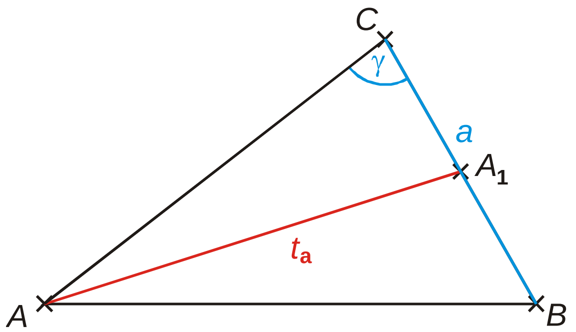


Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky *p* s kružnicí *k* a počtu průsečíků kružnic *l* a *m*. Bod B' v konstrukci nevyužíváme, protože bychom získali stejné výsledky jako s bodem *B*, pouze osově souměrné podle osy AA_0.

Pedagogická poznámka: Největší problémem je konstrukce kvůli nezvyklému tvaru obou trojúhelníků. Zejména ten modrý u kterého obě zadané výšky leží mimo trojúhelník se některým žákům špatně hledá.

Př. 7: Je dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 5\,\text{cm}$. Narýsuj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které je úsečka AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $a = 6\,\text{cm}$ a $\gamma = 50°$.

Náčrtek:

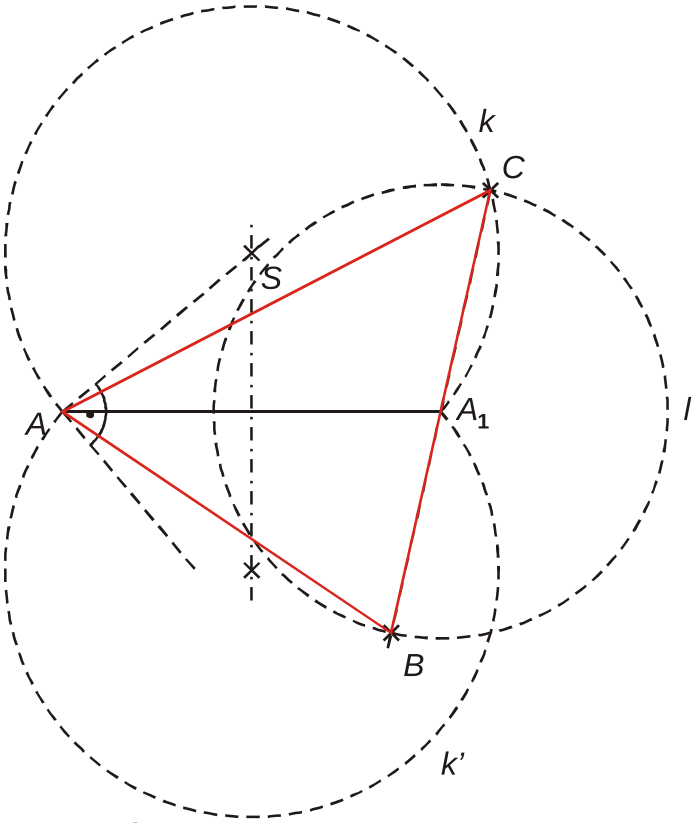


Úloha je polohová, začínáme úsečkou AA_1.

Řešení pomocí množin bodů: Vrchol *C* leží na:

- množině bodů, ze kterých je úsečka AA_1 vidět pod úhlem $50°$,
- kružnice se středem v bodě A_1 a poloměrem $\frac{a}{2}$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $AA_1; |AA_1| = t_a = 6\,\text{cm}$
2. $k, k'; k \cup k' = \{X \in \rho; |\sphericalangle AXA_1| = 50°\}$
3. $l; l\left(A_1; \frac{a}{2} = 3\,\text{cm}\right)$
4. $C; C = l \cap k$
5. B
6. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 1 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic *k* a *l*.

Př. 8: Petáková:
strana 77/cvičení 14 b)
strana 77/cvičení 18 f), g), i), p), s)

Shrnutí: V některých konstrukcích trojúhelníků sestrojíme nejdříve pouze část trojúhelníku a tu pak rozšíříme na celý trojúhelník.