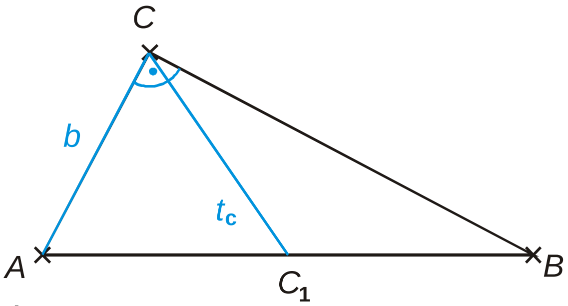
3.4.7 Konstrukce trojúhelníků III (doplňování)

Předpoklady: 3406

Shrnutí dvou předešlých hodin: Dokážeme sestrojit trojúhelníky, u kterých známe tři strany, dvě strany a úhel nebo stranu a dva úhly. Pokud zadání neumožňuje tímto způsobem sestrojit hledaný trojúhelník, sestrojíme „částečný“ trojúhelník a pak jej doplníme na hledaný.

Př. 1: Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC ($|\sphericalangle ACB = \gamma = 90°|$), pro které platí: $t_c = 3{,}5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$.

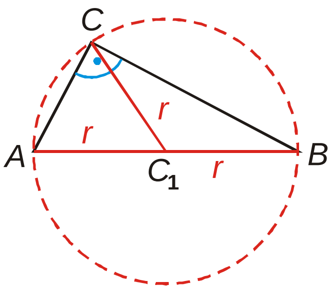
Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

Problém: Úhel ACB není úhlem, který by svíraly zadané úsečky b a t_c $\Rightarrow$ hledáme další úhel nebo stranu tak, abychom mohli sestrojit trojúhelník.

Řešení:



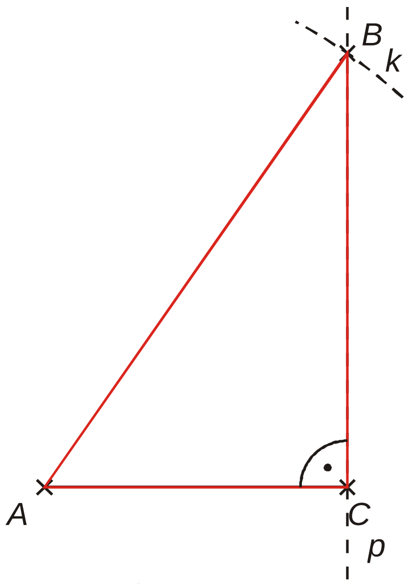
Speciální vlastnost pravoúhlých trojúhelníků: Přepona je zároveň průměrem Thaletovy kružnice, která je zároveň kružnicí opsanou trojúhelníku $\Rightarrow$ platí $|AC_1| = |CC_1| = |BC_1|$ $\Rightarrow$ $c = 2t_c = 7\,\text{cm}$.

$\Rightarrow$ Trojúhelník můžeme snadno sestrojit podle zadání $\gamma = 90°, b = 4\,\text{cm}, c = 7\,\text{cm}$.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

1. $AC; |AC| = b = 4\,\text{cm}$
2. $p; p \perp AC, C \in p$
3. $k; k(A; c = 7\,\text{cm})$
4. $B; B = k \cap p$
5. ΔABC



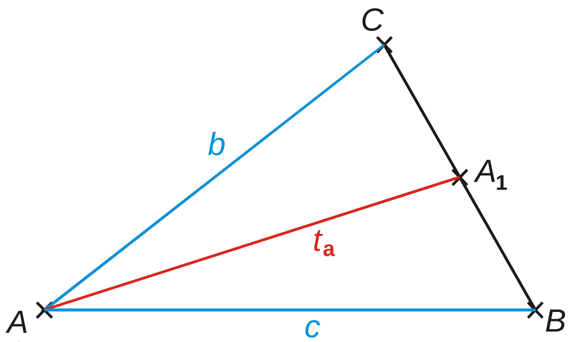
Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice *k* s přímkou *p*.

Dodatek: Řešení předchozího příkladu není definitivním řešením objeveného problému. Můžeme si představit téměř stejné zadání trojúhelníku bez pravého úhlu, který již nebudeme schopni sestrojit.

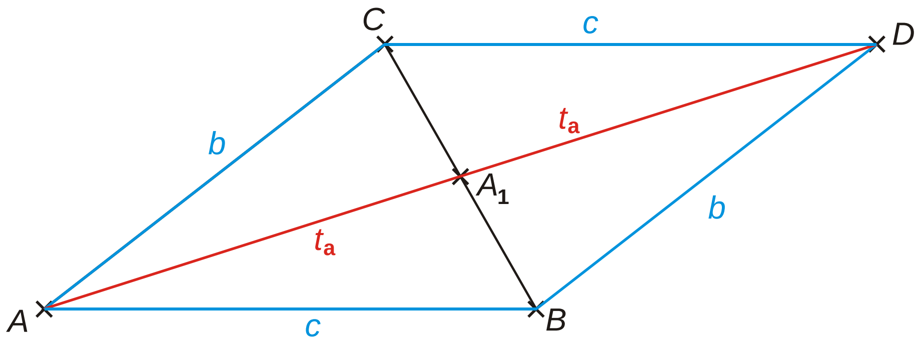
Př. 2: Petáková:
strana 77/cvičení 17 d), e), f)

Př. 3: Je dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 4\,\text{cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky *ABC* pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $b = 5\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$.

Náčrtek:

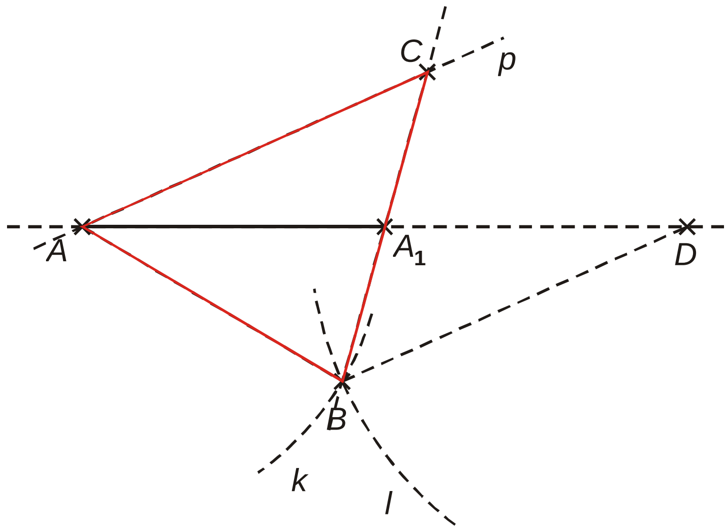


Úloha je polohová.
Problém: Známe tři délky, všechny však vycházejí z jednoho bodu ⇒ nemůžeme sestrojit ani výsledný ani žádný „částečný" trojúhelník.
Řešení: Snažíme se upravit obrázek tak, aby se objevil trojúhelník, u kterého známe tři strany (úhel asi nezískáme) ⇒ doplníme obrázek na rovnoběžník *ABDC*.



Můžeme sestrojit trojúhelník *ABD* (nebo trojúhelník *ADC*), u kterého známe všechny tři strany. Bod *C* najdeme jako průsečík přímky BA_1 rovnoběžky se stranou *BD* bodem *A*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

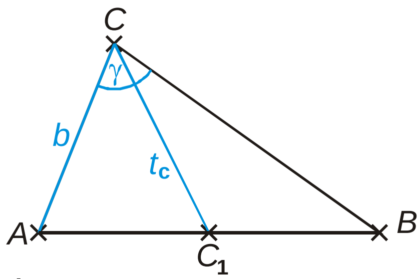
1. $AA_1; |AA_1| = t_a = 4\,\text{cm}$
2. $\leftrightarrow AA_1; D; D \in \leftrightarrow AA_1, |A_1D| = |AA_1|$
3. $k; k(A; c = 4\,\text{cm})$
4. $l; l(D; b = 5\,\text{cm})$
5. $B; B = k \cap l$
6. $\leftrightarrow BA_1$
7. $p; p \parallel BD, A \in p$
8. $C; C = p \cap \leftrightarrow BA_1$
9. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic *k* a *l*.

Př. 4: Sestroj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $\gamma = 65°$, $t_c = 3{,}5\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$.

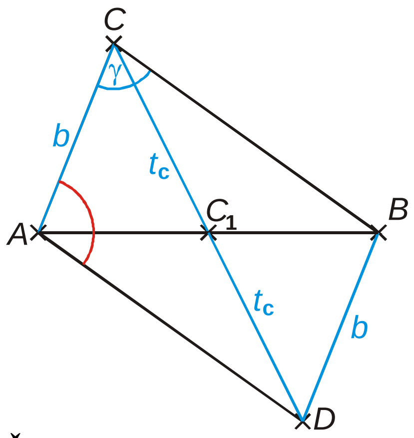
Stalo se to, čeho jsme se báli. Úvodní příklad je zpět, tentokrát bez speciální velikosti úhlu γ.

Náčrtek:



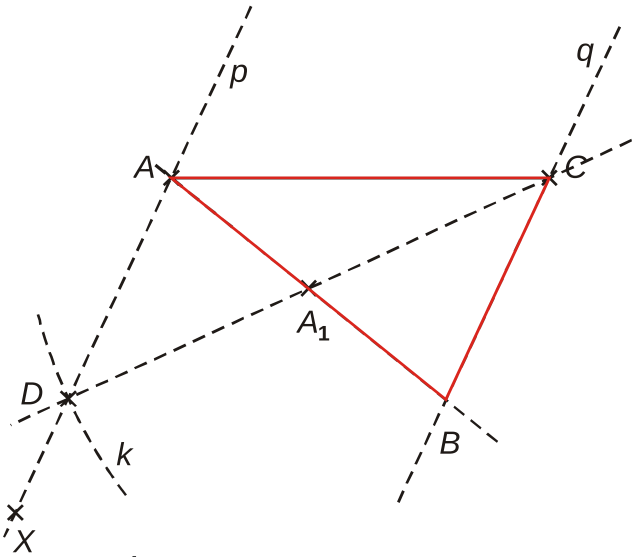
Úloha je nepolohová.

Problém: Úhel γ není úhlem, který by svíraly zadané úsečky *b* a t_c $\Rightarrow$ zkusíme dokreslit obrázek (inspirace minulým příkladem) tak, aby vznikl sestrojitelný trojúhelník.



Řešení: Nakreslený rovnoběžník neřeší příklad, dokud si neuvědomíme, že červeně vyznačený úhel u vrcholu *A* má velikost $180°-\gamma$ $\Rightarrow$ sestrojíme trojúhelník *ADC* a bod *B* najdeme jako průsečík přímky AC_1 s rovnoběžkou se stranou *AD* bodem *C*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

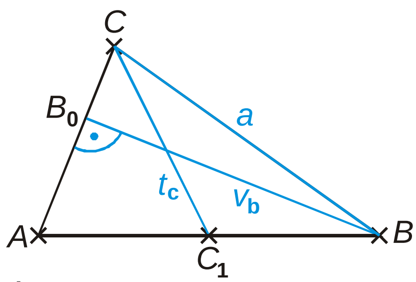
1. $AC; |AC| = b = 5\,\text{cm}$
2. $p; A \in p, X \in p, |\sphericalangle CAX| = 115°$
3. $k; k(C; 2t_c = 7\,\text{cm})$
4. $D; D = k \cap p$
5. $A_1; A_1 \in CD, |A_1D| = |A_1C|$
6. $\leftrightarrow AA_1$
7. $q; q \parallel AD, C \in q$
8. $B; B = q \cap \leftrightarrow AA_1$
9. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice *k* s přímkou *p*.

Pedagogická poznámka: Pokud dojde na rýsování, začněte tak, jak je uvedeno v učebnici - s vodorovnou úsečkou *AC*. Rýsovaný obrázek je tak otočený oproti náčrtku. Rýsování pak vyžaduje lepší představivost.

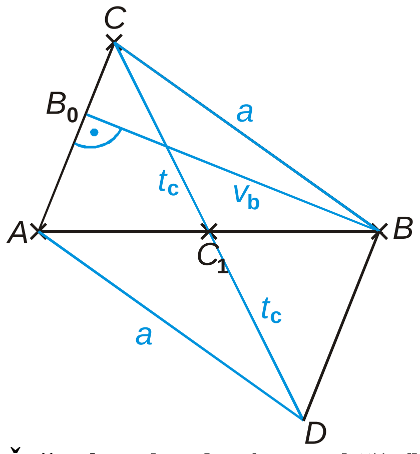
Př. 5: Sestroj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $a = 5$, $t_c = 4{,}5\,\text{cm}$, $v_b = 4\,\text{cm}$.

Náčrtek:



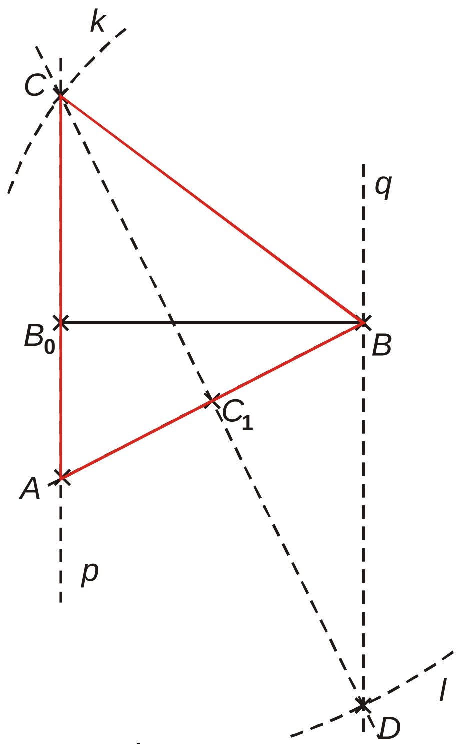
Úloha je nepolohová.

Problém: Můžeme sestrojit pouze trojúhelník BB_0C $\Rightarrow$ zkusíme dokreslit obrázek (inspirace minulými příklady) tak, abychom využili znalost těžnice t_c.



Řešení: Nakreslený rovnoběžník narýsujeme, když si uvědomíme, že přímka *BD* je rovnoběžná s přímkou CB_0 a po nakreslení trojúhelníku BB_0C budeme znát její směr $\Rightarrow$ sestrojíme trojúhelník *CBD* a bod *A* najdeme jako průsečík přímky BC_1 s přímkou CB_0.

Konstrukce:



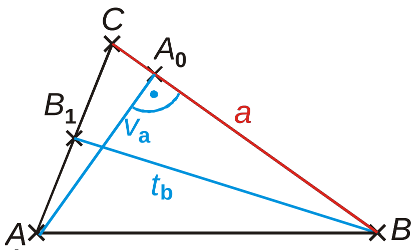
Zápis konstrukce:

1. $BB_0; |BB_0| = v_b = 4\,\text{cm}$
2. $p; B_0 \in p, p \perp BB_0$
3. $k; k(B; a = 5\,\text{cm})$
4. $C; C = k \cap p$
5. $l; l(C; 2t_c = 9\,\text{cm})$
6. $q; B \in q, p \parallel q$
7. $D; D = l \cap q$
8. $C_1; C_1 \in CD, |C_1D| = |C_1C|$
9. $\leftrightarrow BC_1$
10. $A; A = p \cap \leftrightarrow BC_1$
11. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice *k* s přímkou *p* a kružnice *l* s přímkou *q*.

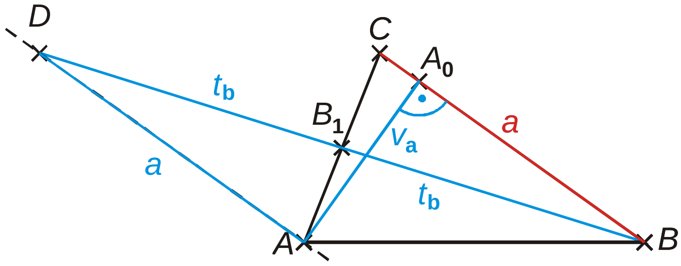
Př. 6: Je dána úsečka BC, $|BC| = 6\,\text{cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí $v_a = 4\,\text{cm}$, $t_b = 4{,}5\,\text{cm}$.

Náčrtek:



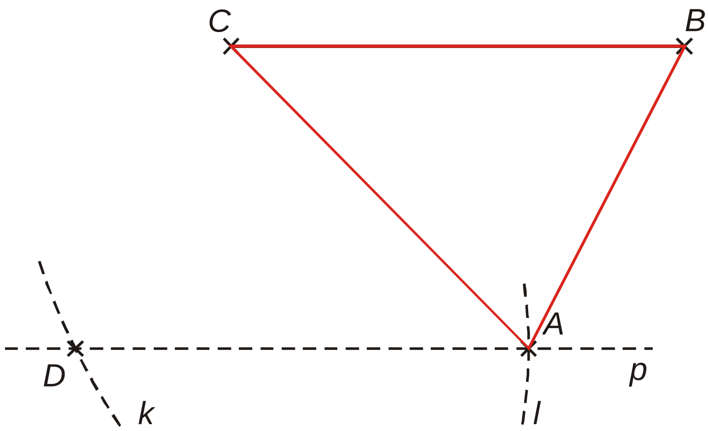
Úloha je polohová.

Řešení: Doplníme obrázek na rovnoběžník *ABDC*, abychom využili velikosti výšky v_a a těžnice t_b.



Body *AD* leží na přímce rovnoběžné s přímkou *BC*, která je od ní vzdálená o $v_a = 4\,\text{cm}$. Bod *D* je od bodu *B* vzdálen o $2t_b = 9\,\text{cm}$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $BC; |BC| = 6\,\text{cm}$
2. $p;\ p \parallel BC, |pBC| = v_a = 4\,\text{cm}$
3. $k; k(B; 2t_b = 9\,\text{cm})$
4. $D; D = k \cap p$
5. $l; l(D; a = 6\,\text{cm})$
6. $A;\ A = p \cap l$
7. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice *k* a přímky (druhý průsečík nevyhovuje náčrtku).

Př. 7: Petáková:
strana 77/cvičení 18 o), u)

Shrnutí: Některé úlohy můžeme vyřešit doplněním na rovnoběžník.