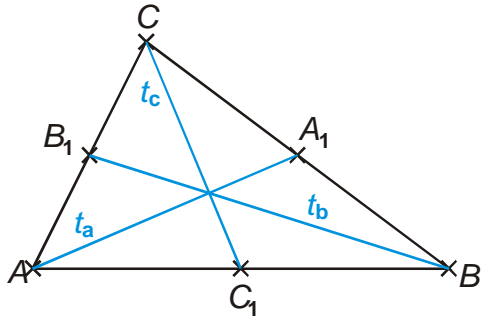


3.4.8 Konstrukce trojúhelníků IV

Předpoklady: 3406

Př. 1: Sestroj trojúhelník ABC , je-li dáno $t_a = 5 \text{ cm}$, $t_b = 6 \text{ cm}$, $t_c = 4 \text{ cm}$.

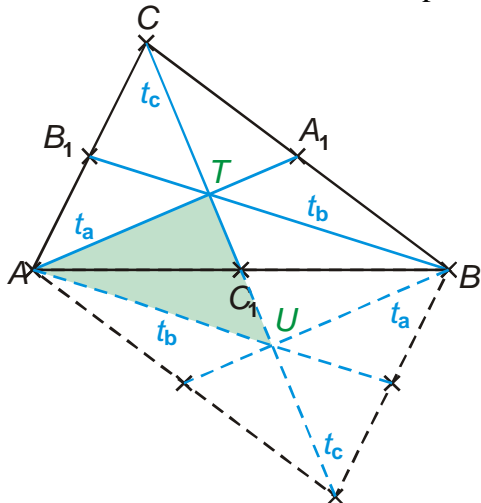
Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

Problém: Stejný problém jako v minulé hodině - známe tři vzdálenosti, které sice procházejí jedním bodem, ale netvoří strany žádného trojúhelníka.

Řešení: Pokusíme se obrázek doplnit tak, aby se objevil sestrojitelný trojúhelník.



Konstrukce:

Můžeme sestrojít zeleně vybarvený trojúhelník ATU , ve kterém známe všechny strany

$$\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b, \frac{2}{3}t_c.$$

Vrchol B najdeme pomocí bodu C_1 (střed úseček TU i AB), vrchol C určíme prodloužením strany UT a nanesením

$$\text{vzdálenosti } \frac{2}{3}t_c.$$

Zápis konstrukce:

$$1. AT; |AT| = \frac{2}{3}t_a = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

$$2. k; k \left(A; \frac{2}{3}t_b = 4 \text{ cm} \right)$$

$$3. l; l \left(T; \frac{2}{3}t_c = \frac{8}{3} \text{ cm} \right)$$

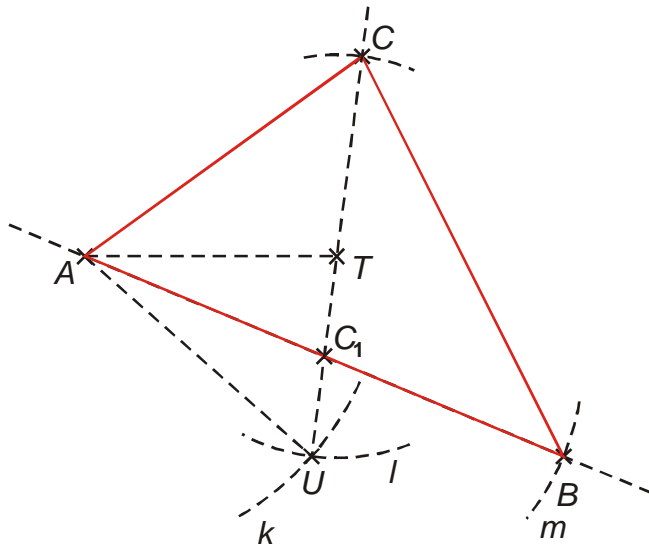
$$4. C_1; C_1 \in \leftrightarrow TU, |TC_1| = |UC_1|$$

$$5. m; m(C_1; |AC_1|)$$

$$6. B; B = m \cap \leftrightarrow AC_1$$

$$7. C; C = l \cap \leftrightarrow TU$$

$$8. \Delta ABC$$



Rozbor: Pokud délky těžnic vyhovují trojúhelníkové nerovnosti, má úloha v polorovině jedno řešení.

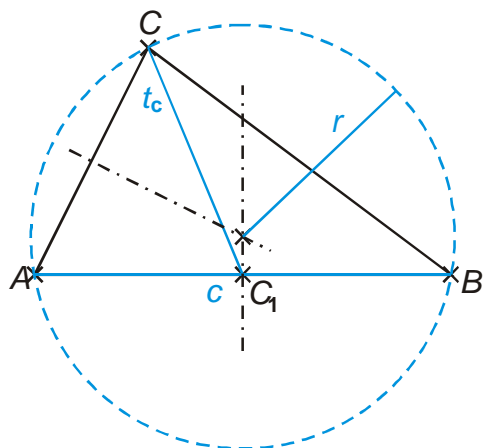
Pedagogická poznámka: Občas se někdo zeptá na nepřesnost, kterou způsobuje v rýsování zlomek s nekonečným desetinným rozvojem. Je dobré si vyjasnit, že zlomek není žádným problémem, stačí když spočít hodnotu zlomku na dvě desetinná místa $\frac{10}{3} = 3,33$ a nechat žáky narýsovat kružnici s tímto poloměrem. Všichni rychle pochopí, že nepřesnost nevzniká kvůli zlomku, ale kvůli nepřesnosti, se kterou dokážeme rýsovat. Kdyby se naše přesnost zvýšila není problém určit hodnotu na vyšší počet desetinných míst. Z diskuse o zpřesňování rychle vyplyne, že zpřesnit výpočet, že daleko jednodušší než zpřesnit rýsování.

Dodatek: Trojúhelník můžeme doplňovat samozřejmě všemi směry, nejen dolů, ale i do obou stran.

Pedagogická poznámka: Tento příklad bývá někdy označován za umělý, vedoucí k tomu, že se žáci nazpaměť učí postup jeho řešení. Myslím, že záleží na podání. Já osobně ho vidím jako vyvrcholení příkladů na doplňování, které jsme řešili v minulé hodině. Pokud se na něj podíváme takto (a zadání je pro skupinu těchto příkladů typické), není jeho řešení ani překvapivé ani extrémně náročné.

Př. 2: Sestroj všechny trojúhelníky ABC , pro které platí: $r = 4\text{ cm}$, $c = 5\text{ cm}$, $t_c = 3,5\text{ cm}$.

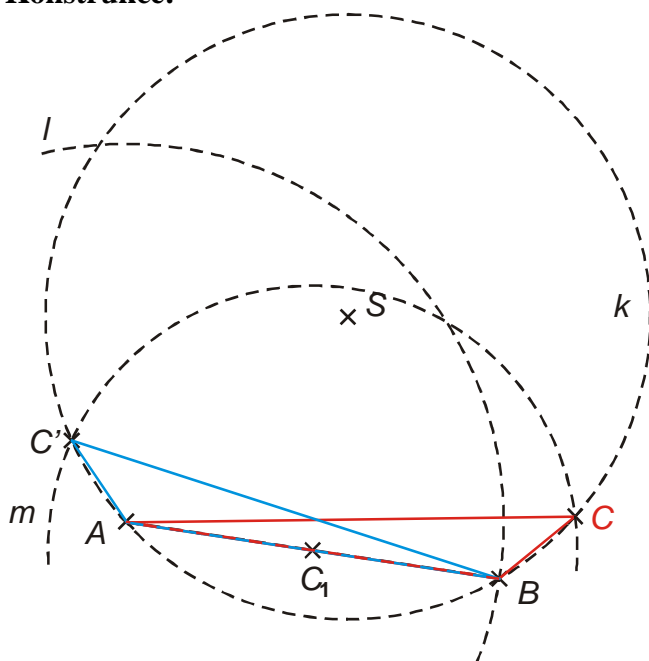
Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

Řešení: Všechny tři vrcholy leží na kružnici opsané \Rightarrow narýsujeme ji jako první. Bod A si na ní můžeme zvolit libovolně (všechny body kružnice jsou rovnocenné) \Rightarrow bod B na kružnici najdeme pomocí vzdálenosti c , bod C pomocí vzdálenosti t_c a bodu C_1 .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

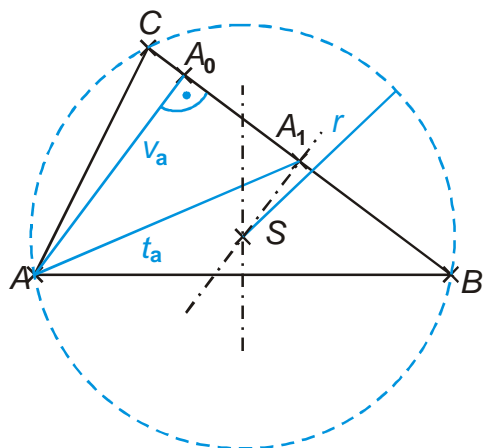
1. $k; k(S; r = 4 \text{ cm})$
2. $A; A \in k$
3. $l; l(A; c = 5 \text{ cm})$
4. $B; B = l \cap k$
5. $C_1; C_1 \in AB, |AC_1| = |BC_1|$
6. $m; m(C_1; t_c = 3,5 \text{ cm})$
7. $C, C'; C \cup C' = m \cap k$
8. $\triangle ABC, \triangle ABC'$

Rozbor: Úloha má žádné, jedno nebo dvě řešení v jedné polorovině v závislosti na počtu průsečíků kružnic k a m . Druhý neoznačený průsečík kružnic k a l je právě vrcholem trojúhelníků v druhé polorovině.

Pedagogická poznámka: Příklad je jednoduchý, těžkým ho dělá možnost volby pro narýsování strany c .

Př. 3: Sestroj trojúhelník ABC , je-li dáno $t_a = 5 \text{ cm}$, $v_a = 4 \text{ cm}$, $r = 5,5 \text{ cm}$.

Náčrtek:



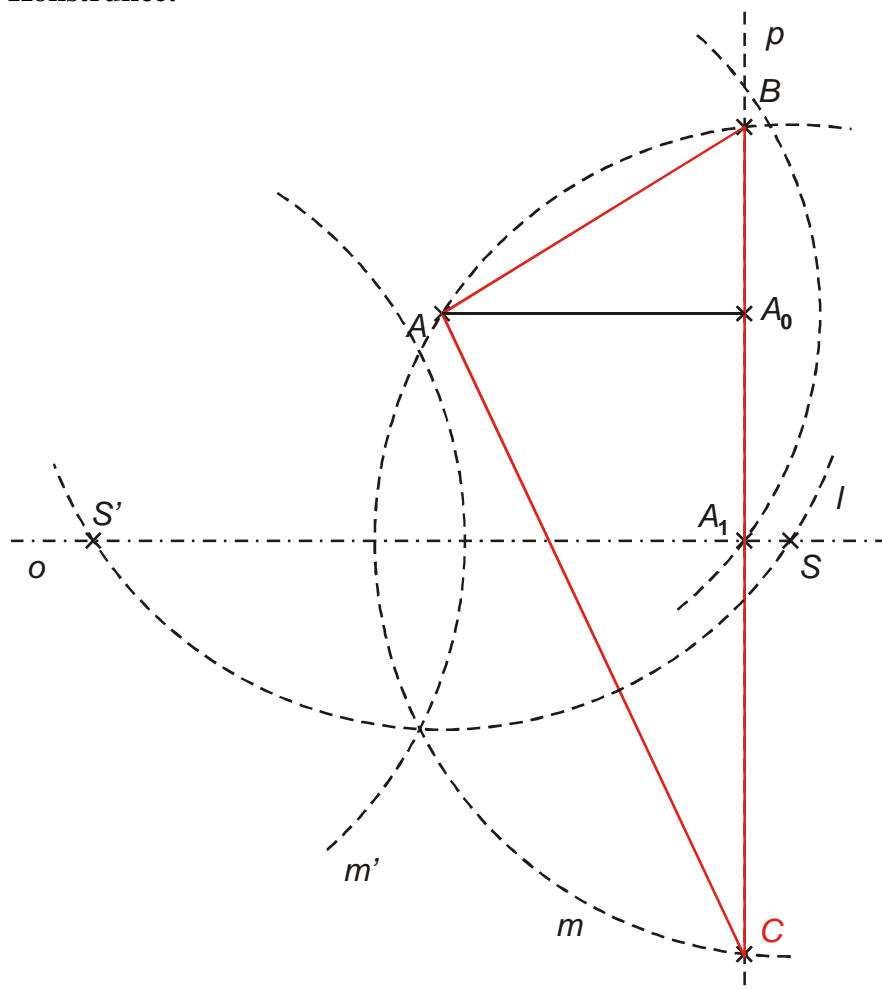
Úloha je nepolohová.

Řešení: Na rozdíl od předchozího příkladu nebudeme začínat kružnicí opsanou. Leží na ní pouze jeden ze tří bodů, které definují známé vzdálenosti. Narýsujeme trojúhelník AA_0A_1 , střed kružnice opsané leží ve vzdálenosti $r = 5\text{ cm}$ od bodu A (zadání příkladu) a zároveň na osách stran. Osu strany CB můžeme nakreslit i když neznáme tyto body. Osa prochází bodem A_1 a je kolmá na úsečku A_0A_1 .

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

1. $AA_0; |AA_0| = v_a = 4\text{ cm}$
2. $p; p \perp AA_0, A_0 \in p$
3. $k; k(A; t_a = 5\text{ cm})$
4. $A_1; A_1 = k \cap p$
5. $o; o \perp A_1A_0, A_1 \in o$
6. $l; l(A; r = 5,5\text{ cm})$
7. $S, S'; S \cup S' = l \cap o$
8. $m; m(S; r = 5,5\text{ cm})$
9. $m'; m(S'; r = 5,5\text{ cm})$
10. $C, B; C \cup B = m \cap p$
11. $\triangle ABC$



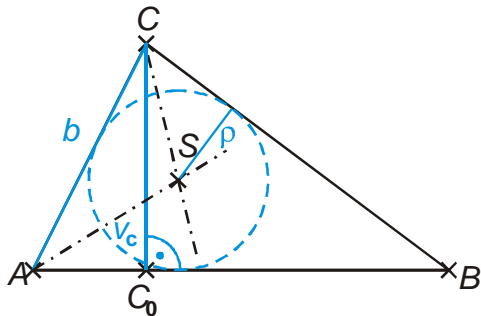
Rozbor: Úloha má žádné, dvě nebo čtyři řešení v jedné polorovině v závislosti na počtu průsečíků kružnic m, m' s přímkou p . I při naší konstrukci jsme našli dvě řešení, body

vzniklé v kroku 10 můžeme označit obráceně a tím získáme druhé řešení s delší stranou a a kratší stranou b .

Pedagogická poznámka: Pokud nemáme příliš mnoho času, předchozí příklad nerýsujeme, aby alespoň 15 minut zbylo na poslední příklad.

Př. 4: Sestroj trojúhelník ABC , pro který platí $v_c = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ a $\rho = 2 \text{ cm}$.

Náčrtek:

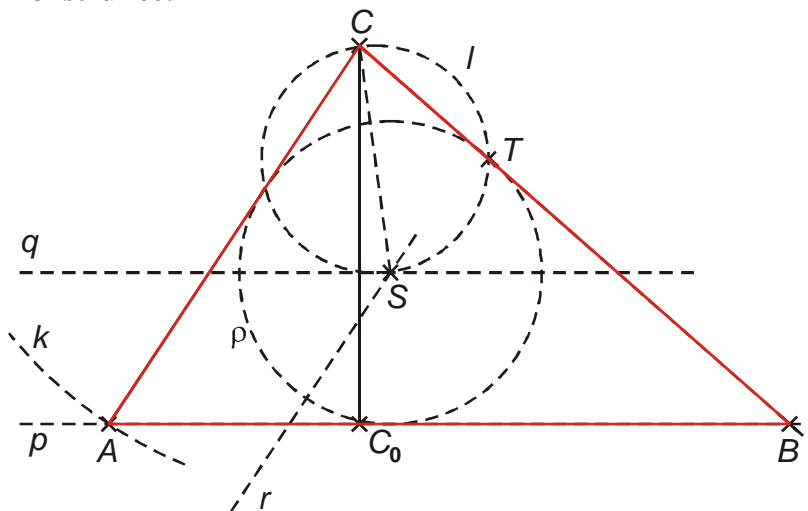


Úloha je nepolohová.

Řešení: Úloha je obtížná svou zdlouhavostí. Řešení můžeme rozdělit do tří kroků.

1. Konstrukce pomocného trojúhelníku ACC_0 .
2. Hledání středu kružnice vepsané (rovnoběžky s přímkami AC , C_0 ve vzdálenosti $\rho = 2 \text{ cm}$).
3. Konstrukce přímky CB jako tečny ke kružnici vepsané z bodu C .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $CC_0; |CC_0| = v_c = 5 \text{ cm}$
2. $p; p \perp CC_0, C_0 \in p$
3. $k; k(C; b = 6 \text{ cm})$
4. $A; A = k \cap p$
5. $q; q \parallel p, |pq| = \rho = 2 \text{ cm}$
6. $r; r \parallel AC, |rAC| = \rho = 2 \text{ cm}$
7. $S; S = q \cap r$
8. $\rho; \rho(S; \rho = 2 \text{ cm})$
9. $l; l = \tau_{CS}$
10. $T; T = l \cap \rho$
11. $\mapsto CT$
12. $C; C \mapsto CT \cap p$
13. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha má jedno řešení v jedné polorovině s hraniční přímkou CA_0 .

Pedagogická poznámka: Asi nejtěžší je pro studenty rozložit konstrukci na tři kroky uvedené v řešení. Při diskusi se třídou vymyslíme vždy pouze jeden krok a necháváme chvíli na další přemýšlení. Při samotné konstrukci je pak nutné dát pozor na správné rýsování Thaletovy kružnice.

Př. 5: Petáková:
strana 77/cvičení 16 a)
strana 77/cvičení 17 g), h)
strana 77/cvičení 19 b), c)
strana 78/cvičení 20 b)

Shrnutí: