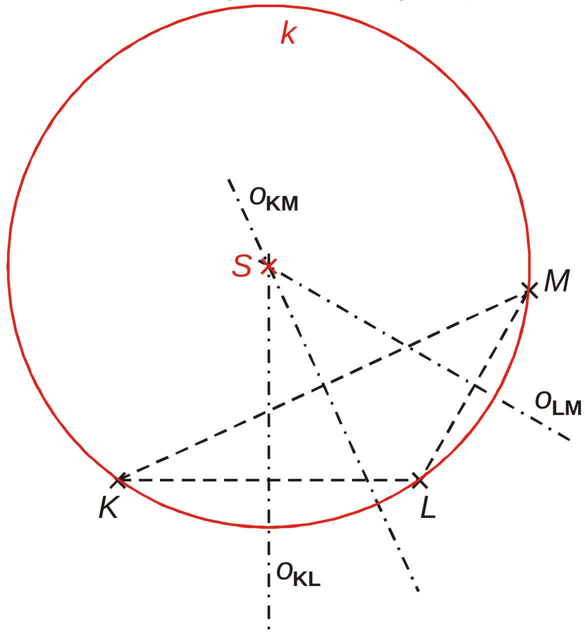
3.4.10 Konstrukce kružnic

Předpoklady: 3404

Př. 1: Jsou dány body K, L a M. Narýsuj všechny kružnice, které prochází těmito třemi body.

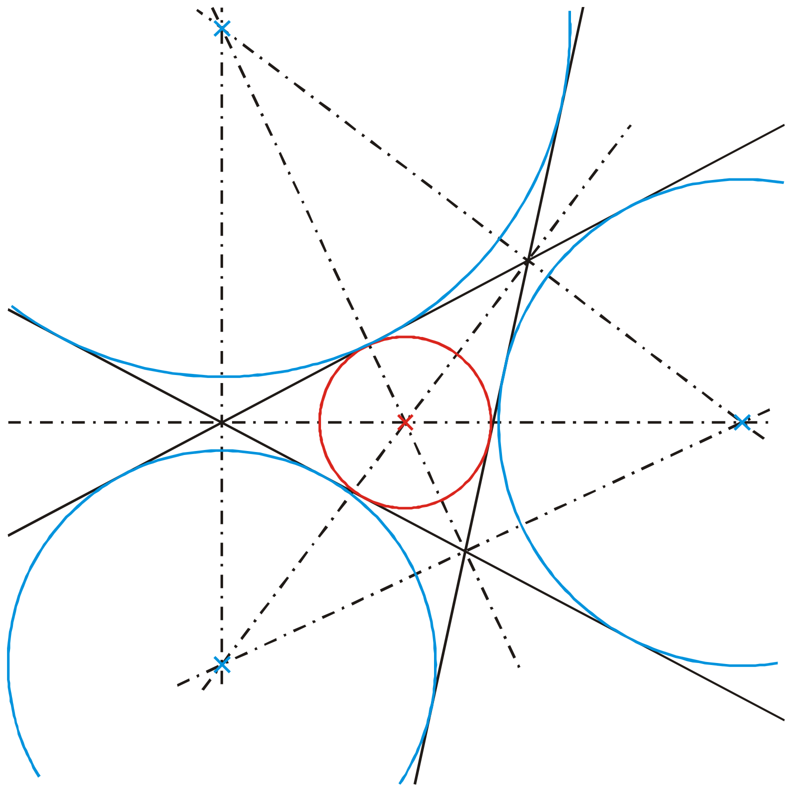
Kružnice - množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od středu kružnice $\Rightarrow$ střed hledané kružnice musí mít stejnou vzdálenost od všech tří zadaných bodů $\Rightarrow$ střed kružnice musí mít stejnou vzdálenost například od dvojice bodů K, L $\Rightarrow$ musí ležet na ose úsečky KL (podobně také na ose úsečky LM a úsečky KM).

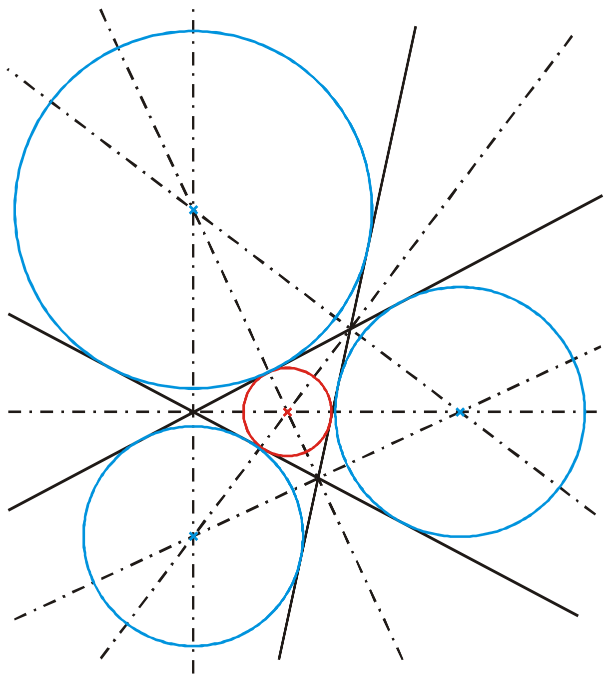


Pedagogická poznámka: Doporučuji žákům, aby udělali i třetí osu. Není samozřejmé, že se všechny tři osy protnou ve stejném bodě. Jde také o dobrou kontrolu přesnosti rýsování.

Př. 2: Jsou dány tři přímky p, q, r. Každé dvě z nich jsou navzájem různoběžné, všechny tři přímky nemají společný průsečík. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají těchto tří přímek.

Tento příklad už známe – přímky p, q, r tvoří strany trojúhelníka a když hledáme kružnici, která se všech tří dotýká, hledáme kružnici trojúhelníku vepsanou (průsečík os úhlů).
Jiné zdůvodnění: Středy hledaných kružnic musí být od všech tří přímek stejně daleko $\Rightarrow$ musí ležet na osách úhlů (osa úhlu je množinou všech bodů, která mají stejnou vzdálenost od obou ramen).
Protože hledané kružnice nemusí být uvnitř trojúhelníku, sestrojíme nejen osy vnitřních, ale i vnějších úhlů trojúhelníku.





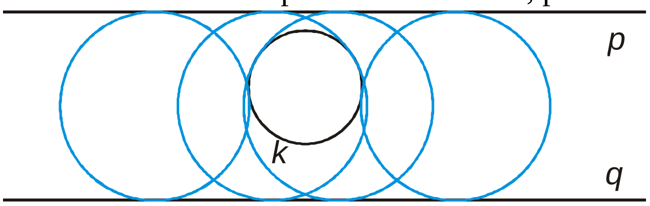
Část nakreslených kružnic už známe:

- Kružnice procházející třemi body, je **kružnice opsaná trojúhelníku**, který je těmito body určen.
- Kružnice dotýkající se tří přímek a ležící uvnitř trojúhelníku, který tyto přímky ohraničují, je **kružnice vepsaná trojúhelníku**, který je těmito přímkami určen.
- Kružnice dotýkající se tří přímek a ležící vně trojúhelníku, který tyto přímky ohraničují, jsou **kružnice připsané trojúhelníku**, který je těmito přímkami určen.

Pedagogická poznámka: Neříkáme si předem, že v předchozích příkladech jde konstrukci kružnice opsané (příklad 1) případně kružnice vepsané a kružnic připsaných (druhý příklad), řekneme si to až po vyřešení obou příkladů.
Pojmenování bodů v prvním příkladu je zvoleno schválně, aby žákům body neasociovaly vrcholy trojúhelníku.
Většina žáků odhadne v příkladu dva pouze kružnici vepsanou, na kružnice připsané přijde až, když se dozví, že jedna kružnice je málo.

Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *p*, *q* a kružnice *k*, která leží uvnitř pásu, který ohraničují přímky *p*, *q*. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají přímek *p*, *q* a kružnice *k*.

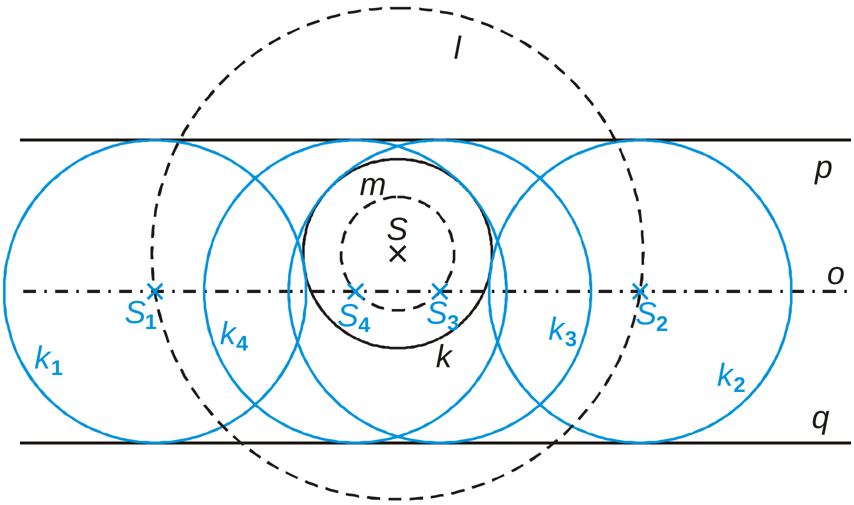
Náčrtek: Vzdálenost přímek označíme *d*, poloměr kružnice *k* označíme *r*.



Příklad bude mít až čtyři řešení, určitě najdeme dvě kružnice s vnějším dotykem a ještě další dvě s vnitřním dotykem.
Hledáme střed modrých kružnic:

- Musí být stejně vzdálen od obou přímek $\Rightarrow$ leží na ose pásu.
- Musí být od kružnice vzdálen stejně jako od obou přímek $\Rightarrow$ musí být od kružnice vzdálen o polovinu vzdálenosti mezi přímkami $\Rightarrow$ leží na kružnici se středem ve středu kružnice *k* a poloměru $r+\frac{d}{2}$ (kružnice s vnějším dotykem) nebo $\left|r-\frac{d}{2}\right|$ (kružnice s vnitřním dotykem).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

$1.\ p,q,k;\ p \parallel q, |pq| = d, k(S,r)$

$2.\ o;\ osa\ pásu\ přímek\ p,q$

$3.\ l;\ l\left(S; r+\frac{d}{2}\right)$

$4.\ S_1, S_2;\ S_1 \cup S_2 = o \cap l$

$5. k_1, k_2; k_1\left(S_1; \frac{d}{2}\right), k_2\left(S_2; \frac{d}{2}\right)$

$6. m; m\left(S; \left|r - \frac{d}{2}\right|\right)$

$7. S_3, S_4; S_3 \cup S_4 = o \cap m$

$8. k_3, k_4; k_3\left(S_3; \frac{d}{2}\right), k_4\left(S_4; \frac{d}{2}\right)$

Rozbor: Úloha má vždy čtyři řešení.

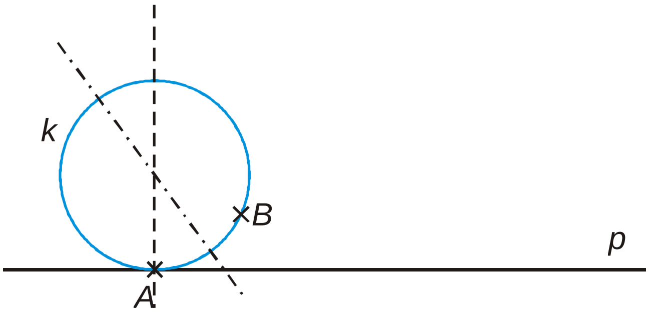
Kružnice, které jsme hledali, měly splňovat vždy tři ze tří typů podmínek:

- procházet bodem (podmínka typu *B*),
- dotýkat se přímky (podmínka typu *p*),
- dotýkat se kružnice (podmínka typu *k*).

Tyto úlohy se nazývají **Apollóniovy**. Existuje celkem deset těchto úloh. My jsme si ukázali úlohu *BBB* (první příklad), úlohu *ppp* (druhý příklad) a jednu z možností úlohy *ppk* (třetí příklad). Řešení všech úloh (snadno k nalezení na internetu) přesahuje naše možnosti.

Př. 4: Je dána přímka *p* na ní bod *A* a mimo ní bod *B*. Najdi všechny kružnice, které procházejí body *A*, *B* a dotýkají se přímky *p*.

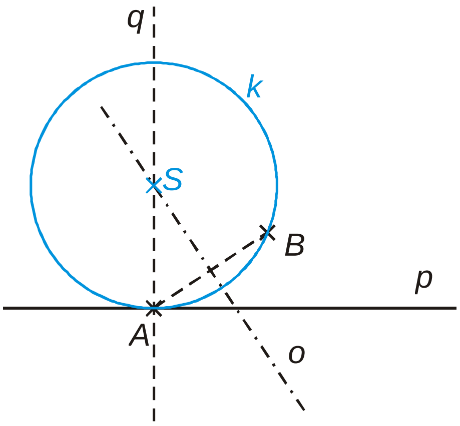
Náčrtek:



Střed hledané kružnice:

- Musí ležet na kolmici k přímce procházející bodem *A*.
- Musí být stejně vzdálen od obou bodů $\Rightarrow$ leží ose úsečky *AB*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

$1. p, A, B; A \in p, B \notin p$

$2. q; q \perp p, A \in q$

$3. o; o_{AB}$

$4. S; S = q \cap o$

$5. k; k(S; |AS|)$

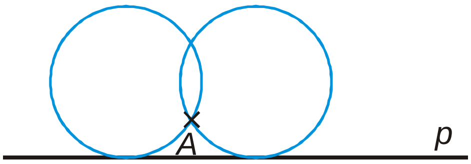
Rozbor: Pokud bod *B* neleží na přímce *p* má úloha má vždy jedno řešení.

Předchozí příklad je opět Apollóniova úloha, speciální případ, kdy bod leží buď na přímce (podmínka (pB)) nebo na kružnici (podmínka (pk)). Tyto úlohy se nazývají **Pappovy**.

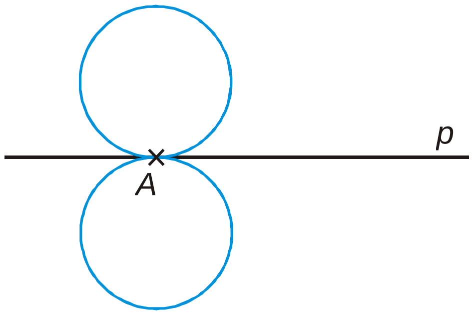
Předchozí příklad se označuje jako Pappova úloha $(pB)B$.

Př. 5: Je dána přímka *p* a bod *A*. Narýsuj všechny kružnice, které se dotýkají přímky *p*, procházejí bodem *A* a mají poloměr $r = 3\text{cm}$.

Náčrtek:



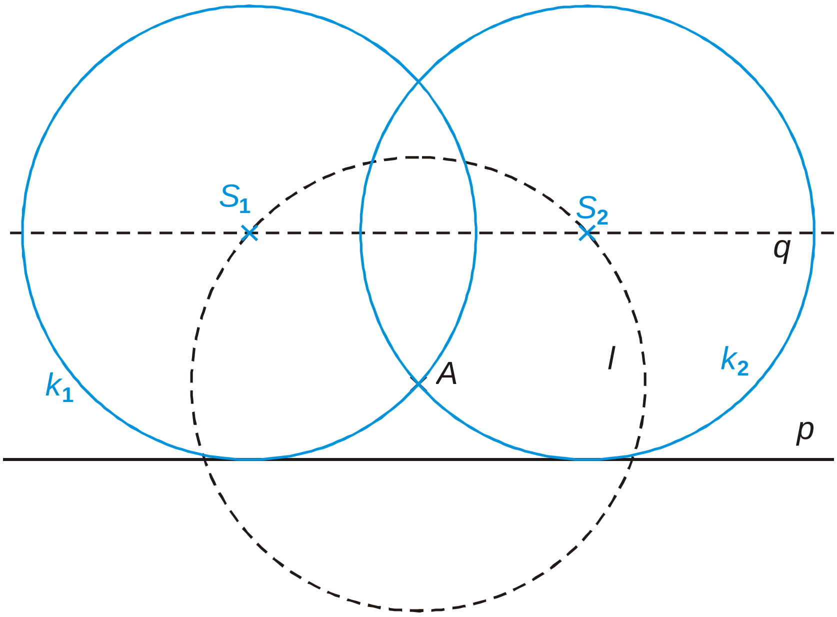
nebo



Střed hledané kružnice:

- Musí být od přímky *p* vzdálen 3cm $\Rightarrow$ musí ležet na rovnoběžce s přímkou *p* vzdálenou 3 cm.
- Musí být od bodu *A* vzdálen 3cm $\Rightarrow$ leží na kružnici $l(A, 3\text{cm})$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. p, A
2. $q; q \parallel p, |pq| = 3\text{cm}$
3. $l; l(A; 3\text{cm})$
4. $S_1, S_2; S_1, S_2 = q \cap l$
5. $k_1, k_2; k_1(S_1; 3\text{cm}), k_2(S_2; 3\text{cm})$

Rozbor: Počet řešení závisí na vzdálenosti bodu *A* od přímky *p*.

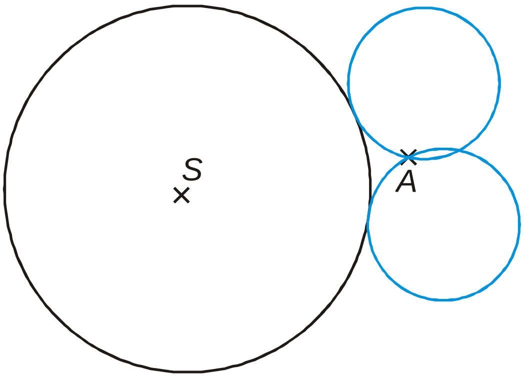
$|pA| < 6\text{cm}$ $\Rightarrow$ úloha má dvě řešení,

$|pA| = 6\text{cm}$ $\Rightarrow$ úloha má jedno řešení,

$|pA| > 6\text{cm}$ $\Rightarrow$ úloha nemá žádné řešení.

Př. 6: Je dána kružnice $k(S;4,5\,\mathrm{cm})$ a bod *A*. Najdi všechny kružnice *l*, které procházejí bodem *A*, dotýkají se kružnice *k* a mají poloměr $r = 2\,\mathrm{cm}$. Proveď diskusi v závislosti vzdálenosti bodu *A* od středu kružnice *k*.

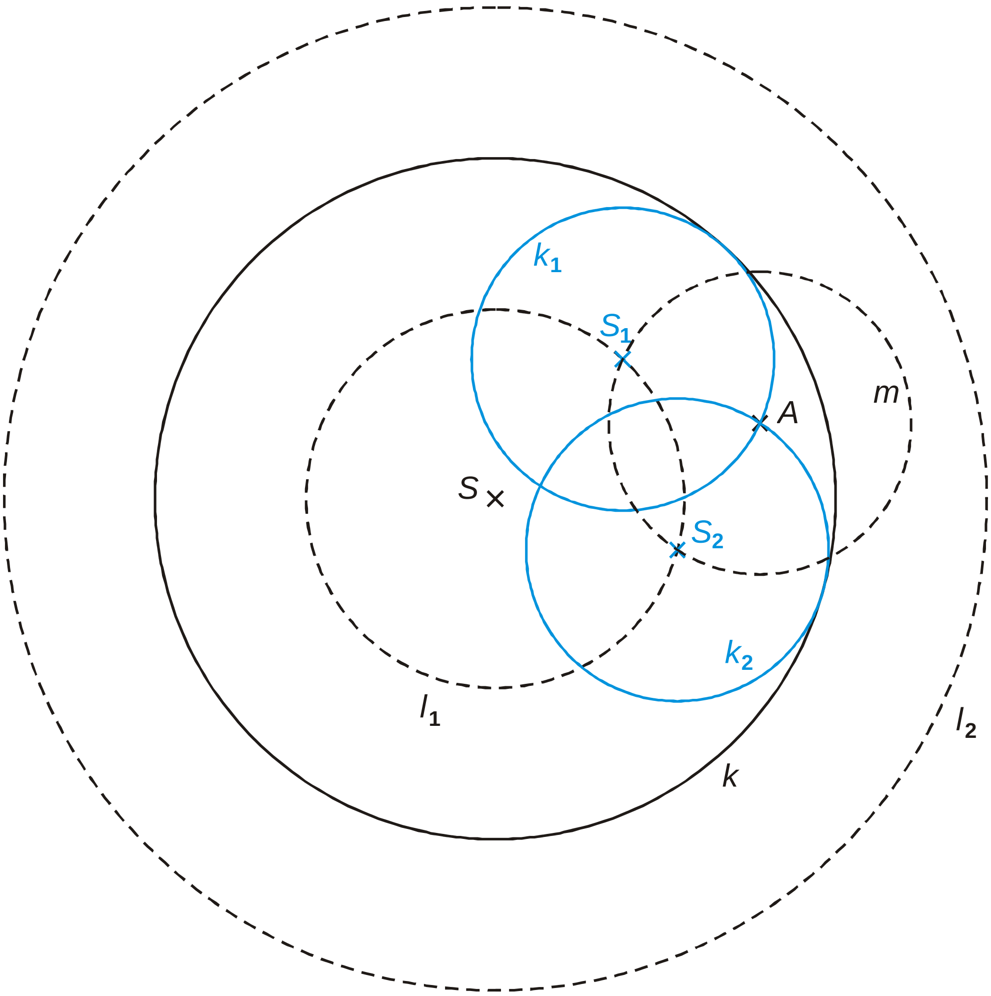
Náčrtek:



Střed hledané kružnice:

- Musí být od kružnice *k* vzdálen $2\,\mathrm{cm}$ $\Rightarrow$ musí ležet na kružnici $l_1(S;2,5\,\mathrm{cm})$ (vnitřní dotyk) nebo na kružnici $l_2(S;6,5\,\mathrm{cm})$.
- Musí být od bodu *A* vzdálen 2 cm $\Rightarrow$ leží na kružnici $l(A,2\,\mathrm{cm})$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

$1. k(S, 4{,}5\,\text{cm}), A$

$2. l_1, l_2; l_1(S; 2{,}5\,\text{cm}), l_2(S; 6{,}5\,\text{cm})$

$3. m; m(A; 2\,\text{cm})$

$4. S_1, S_2; S_1, S_2 = (l_1 \cup l_2) \cap m$

$5. k_1, k_2; k_1(S_1; 2\,\text{cm}), k_2(S_2; 2\,\text{cm})$

Rozbor: Počet řešení závisí na vzdálenosti bodu *A* od středu *S*.

$|pA| < 0{,}5\,\text{cm} \Rightarrow$ úloha nemá žádné řešení,

$|pA| = 0{,}5\,\text{cm} \Rightarrow$ úloha má právě jedno řešení,

$0{,}5 < |pA| < 6{,}5\,\text{cm} \Rightarrow$ úloha má dvě řešení,

$|pA| = 6{,}5\,\text{cm} \Rightarrow$ úloha má právě jedno řešení,

$|pA| > 6{,}5\,\text{cm} \Rightarrow$ úloha nemá žádné řešení.

Př. 7: Petáková:
strana 76/cvičení 8 a)
strana 76/cvičení 11 a)
strana 77/cvičení 12
strana 77/cvičení 13

Shrnutí: Při hledání středů kružnic využíváme množiny bodů, na kterých musí střed ležet.