3.3.11 Konstrukce na základě výpočtu I

Předpoklady:

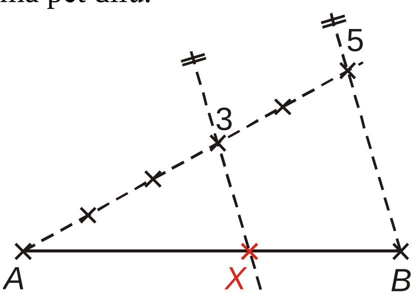
Pedagogická poznámka: Původně byla látka rozepsanou do dvou hodin, v první bylo kromě dělení úseček zařazena i čtvrtá geometrická úměrná. Právě její probrání se nestíhalo, proto byla látka přerovnána následujícím způsobem. V případě časového stresu je možné třetí hodinu vynechat nebo ji přesunout na samostudium.

Pedagogická poznámka: Je důležité si uvědomit, že následující sled příkladů neslouží k tomu, aby si žáci upevnili mechanický postup na dělení úseček. Jediné, co by si měli pamatovat, že ve všech příkladech využijí podobnost trojúhelníků a úsečku, na kterou si označí potřebný počet dílů. Vše ostatní by měli vymýšlet v konkrétní situaci sami. Sled je upravený tak, aby tupému opakování moc nepřál, navíc si na tabuli ukazujeme i další možnosti. pokud řešíme problémy v lavici snažím se žáka směrovat vždy na trochu jiné řešení. Pokud nejsou schopni následující příklad sami vyřešit, bereme to jako náznak toho, že postup ještě neovládli správně. Rychlost postupu v této hodině hodně závisí na tom, jak rychle se studenti oprostí od mechanického opakování a začnou tvůrčím způsobem používat podobnost trojúhelníků. Doporučuji postup neuspěchat a v případě potřeby ošidit využití Pythagorovy věty, kde jsou příklady daleko mechaničtější.

Obrázky u následujících příkladů jsou schválně kresleny "každý jinak" (kreslím je tak i při hodině na tabuli), aby žáci viděli, že jejich tvar není důležitý.

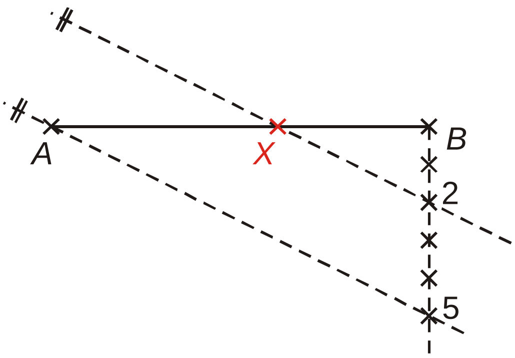
Př. 1: Úsečku *AB* rozděl bodem *X* na dvě části tak, aby platilo: $|AX|:|BX| = 3:2$. Najdi co nejvíce různých způsobů, jak na řešení využít podobnost trojúhelníků.

Bod *X* dělí úsečku na dvě části o třech (úsečka *AX*) a dvou (úsečka *BX*) dílech $\Rightarrow$ celá úsečka má pět dílů.



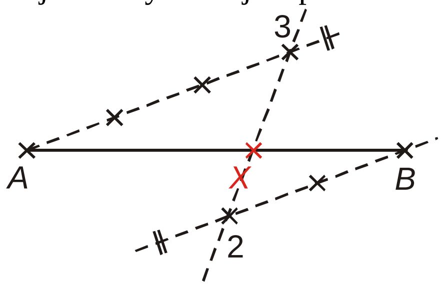
Trojúhelníky $AB5$ a $AX3$ jsou si podobné v poměru: $\frac{A3}{A5} = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ úsečky AB a AX si musí být podobné ve stejném poměru $\Rightarrow$ $\frac{AX}{AB} = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ nalezli jsme požadovaný bod *X*.

Pomocnou úsečku můžeme kreslit i z druhé strany.



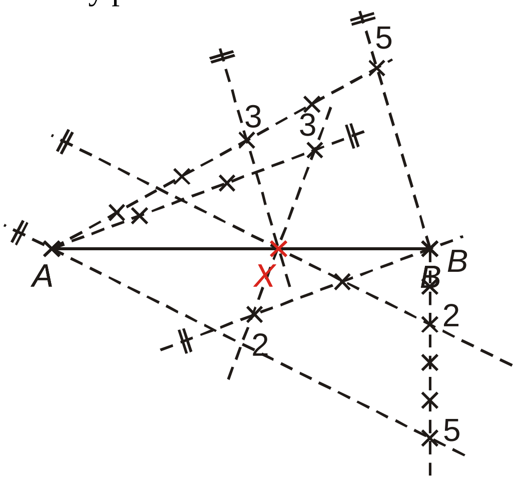
Trojúhelníky $AB5$ a $XB2$ jsou si podobné v poměru: $\frac{A2}{A5} = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ úsečky AB a XB si musí být podobné ve stejném poměru $\Rightarrow$ $\frac{BX}{AB} = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ nalezli jsme požadovaný bod *X*.

Příklad můžeme vyřešit i přímo pouze poměrem $|AX|:|BX| = 3:2$, tím, že nakreslíme dva trojúhelníky navzájem podobné s tímto poměrem.



Trojúhelníky $AX3$ a $BX2$ jsou si podobné v poměru: $\frac{A3}{B2} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ úsečky AX a BX si musí být podobné ve stejném poměru $\Rightarrow$ $\frac{AX}{BX} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ nalezli jsme požadovaný bod *X*.

Že všechny postupy vedou ke stejnému výsledku, se snadno přesvědčíme tím, že všechny obrázky položíme na sebe.



Při dělení úsečky postupujeme ve dvou krocích:

- Uvědomíme si, kolik dílů mají jednotlivé vzdálenosti, které na úsečce mají vzniknout.
- Najdeme vhodnou podobnost trojúhelníků, kterými můžeme takovou situaci realizovat.

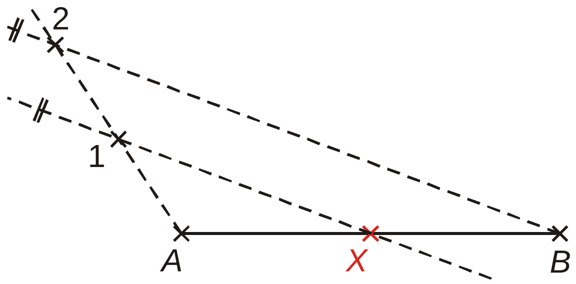
Pamatovat si další podrobnosti postupu není rozumné, protože tím omezujeme své možnosti reagovat na různé situace.

Pedagogická poznámka: Po všech (u těch, kteří příklad nevyřeší sami, na tom trvám) chci, aby nakreslili i druhou možnost řešení, s úsečkou vycházející z druhého krajního bodu.

Př. 2: Úsečku *AB* rozděl bodem *X* na dvě části tak, aby platilo:
a) $|AX|:|AB| = 1:2$ b) $|AB|:|BX| = 3:2$

a) $|AX|:|AB| = 1:2$

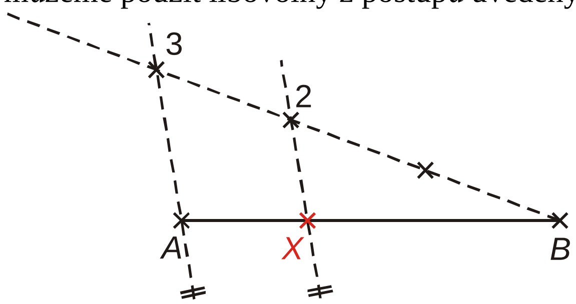
Na úsečce vzniknou tři vzdálenosti (závorce počet dílů): *AB* (2), *AX* (1), *BX* (1). Na řešení můžeme použít libovolný z postupů uvedených v předchozím příkladě.



Trojúhelníky $AB2$ a $AX1$ jsou si podobné v poměru: $\frac{A1}{A2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ úsečky AB a AX si musí být podobné ve stejném poměru $\Rightarrow$ $\frac{AX}{AB} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ nalezli jsme požadovaný bod *X*.

b) $|AB|:|BX| = 3:2$

Na úsečce vzniknou tři vzdálenosti (závorce počet dílů): *AB* (3), *AX* (1), *BX* (2). Na řešení můžeme použít libovolný z postupů uvedených v předchozím příkladě.



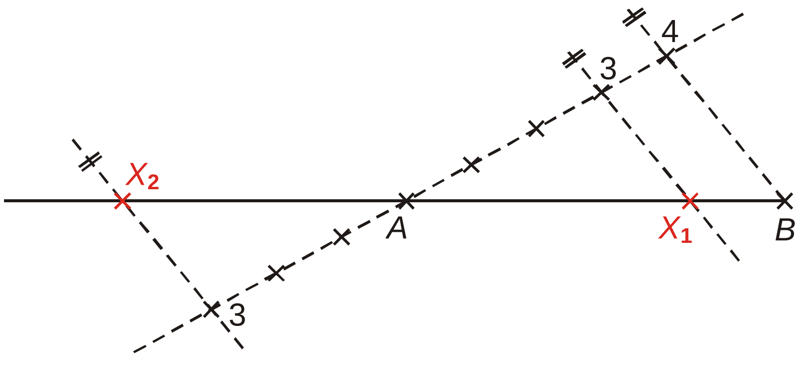
Trojúhelníky $BA3$ a $BX2$ jsou si podobné v poměru: s $\Rightarrow$ úsečky AB a BX si musí být podobné ve stejném poměru $\Rightarrow$ $\frac{BX}{AB} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ nalezli jsme požadovaný bod *X*.

Př. 3: Jsou dány body *A*, *B*. Na přímce *AB* narýsuj všechny body *X* tak, aby platilo:
a) $|AX|:|AB| = 3:4$, b) $|BX|:|AB| = 3:2$.
Hledej co nejúspornější způsob narýsování.

a) $|AX|:|AB| = 3:4$

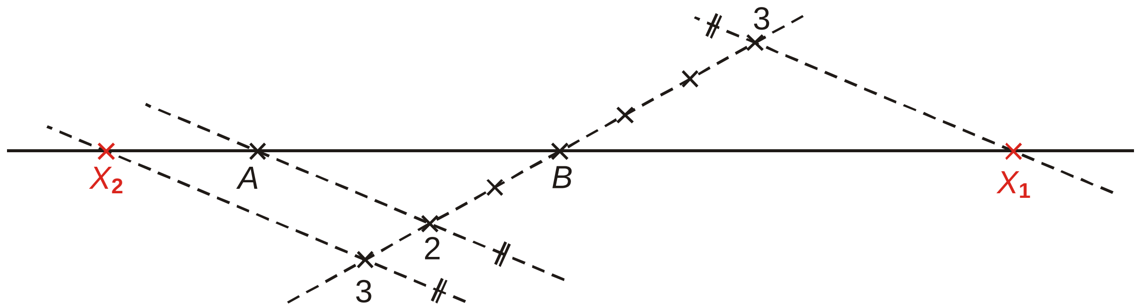
Velmi podobné předchozím příkladům, ale máme body *X* hledat na celé přímce *AB* $\Rightarrow$ bod *X* může ležet i mimo úsečku *AB*, zřejmě před bodem *X*.

Konstrukce:



b) $|BX|:|AB| = 3:2$

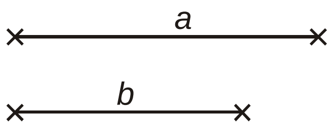
Vzdálenost *BX* je větší než vzdálenost *AB* $\Rightarrow$ opět najdeme dva body *X*, oba budou ležet mimo úsečku *AB*.



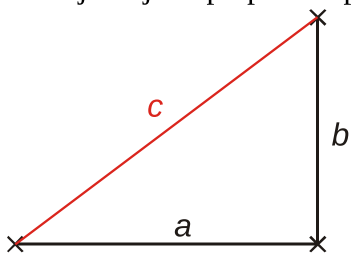
Pedagogická poznámka: Žákům, kteří v bodě a) nakreslí pouze jeden bod X (vždy to bývá ten na úsečce AB) podobně jako v předchozích příkladech v první fázi připomínám, aby si přečetli pořádně zadání (změna z úsečky na přímku má určitě svůj význam). I když jim existenci druhého bodu mimo úsečku AB někdo poradí, měli by se ho pokusit najít sami. U obou příkladů se snažím motivovat žáky k tomu, aby kreslili úsporně (nerýsovali zbytečně dvě sady trojúhelníků).

Př. 4: Jsou dány úsečky o délkách a, b, $a > b$. Narýsuj:
a) úsečku o délce $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, b) úsečku o délce $d = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Při rýsování zvol délky úseček: $a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$..

Problém: Oba výrazy ani náhodou nepřipomínají rovnost dvou poměrů.
Řešení: Oba výrazy připomínají Pythagoru větu $\Rightarrow$ při rýsování využijeme vztahy mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka.

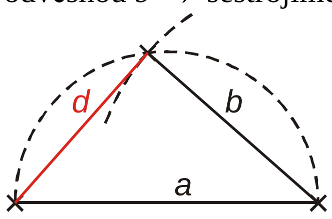


a) úsečka o délce $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Vztah uvedený v zadání udává délku přepony v pravoúhlém trojúhelníku $\Rightarrow$ úsečku o délce c sestrojíme jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku o stranách a, b.



Numerická kontrola: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

b) úsečka o délce $d = \sqrt{a^2 - b^2}$
Vztah uvedený v zadání udává délku odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou a a odvěsnou b $\Rightarrow$ sestrojíme tento trojúhelník pomocí Thaletovy kružnice.



Numerická kontrola: $d=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\doteq 2,65$

Pedagogická poznámka: Většina žáků samostatně nepřijde na to, že musí použít Pythagorovu větu, ale ta bystřejší menšina by měla dostat šanci.

Pedagogická poznámka: Řešení následujícího příkladu je uvedeno v příští hodině. V této hodině se k němu dostávají jen nejrychlejší žáci .

Př. 5: Jsou dány úsečky o délkách *a*, *b*, *c*. Sestroj úsečku o délce $x=\frac{a\cdot b}{c}$. Najdi obecný postup, jak sestrojit bez měřítka požadovanou úsečku pro libovolné konkrétní délky úseček *a*, *b*, *c*. Zkonstruuj úsečku *x* pro konkrétní délky $a=6\,\text{cm}$, $b=5\,\text{cm}$, $c=4\,\text{cm}$. Změř její délku a zkontroluj ji pomocí numerického výpočtu.

Př. 6: Petáková:
strana 78/cvičení 29

Shrnutí: K dělení úseček používáme podobnost trojúhelníků.