

3.3.12 Konstrukce na základě výpočtu II

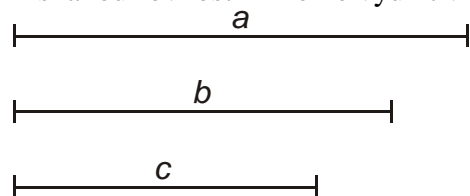
Předpoklady: 030311

Př. 1: Jsou dány úsečky o délkách a, b, c . Sestroj úsečku o délce $x = \frac{a \cdot b}{c}$. Najdi obecný postup, jak sestavit bez měřítka požadovanou úsečku pro libovolné konkrétní délky úseček a, b, c . Zkonstruuj úsečku x pro konkrétní délky $a = 6 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$. Změř její délku a zkontroluj výsledek pomocí numerického výpočtu.

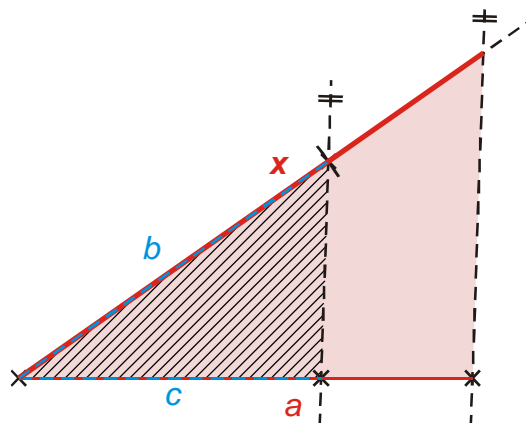
Umíme konstruovat pomocí podobných trojúhelníků \Rightarrow pokusíme se upravit výraz na rovnost dvou poměrů: $x = \frac{a \cdot b}{c} \quad / : b$.

$\frac{x}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow$ rovnost poměrů dvou stran (platí u podobných trojúhelníků).

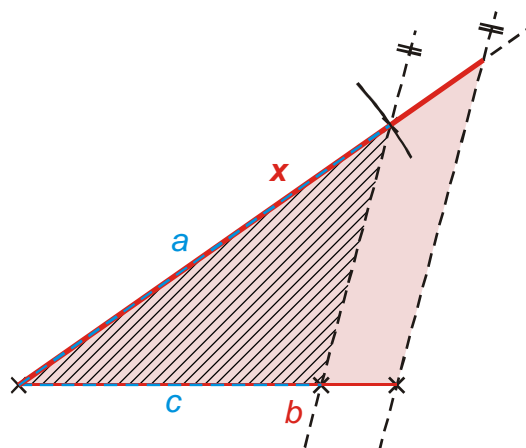
Získanou rovnost můžeme využít více způsoby.



$\frac{x}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow$ úsečky o délkách b, c tvoří modrý (na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami x, a . Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách c, a , druhou strany o délkách x, b .



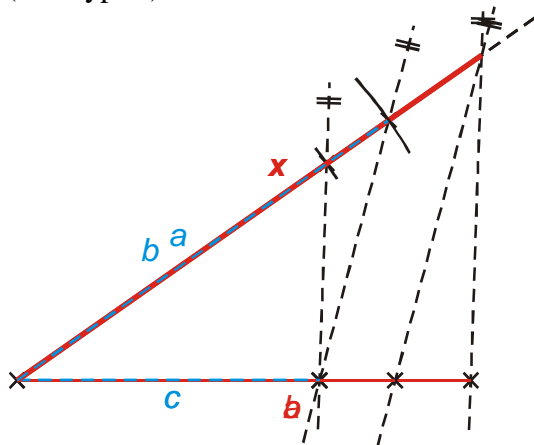
$\frac{x}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow$ úsečky o délkách a, c tvoří modrý (na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami x, b . Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách x, a , druhou strany o délkách c, b .



Kontrola výpočtem: $x = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{6 \cdot 5}{4} = 7,5$ cm (stejná délka, kterou jsme naměřili).

Pedagogická poznámka: Při postupu s tabulí nechávám žákům čas, aby podle slovního rozboru poměru sami nakreslili obrázek.

Že oběma způsoby získáme stejný výsledek, se opět můžeme přesvědčit překrytím obrázků (bez výplní).



Výraz $x = \frac{a \cdot b}{c}$ je délkou úsečky jejíž velikost se nazývá **čtvrtá geometrická úměrná** úseček o délkách a, b, c .

Při čtvrté geometrické úměrné (i při mnoha dalších příkladech) postupujeme ve dvou krocích:

- Upravíme zadaný vztah na rovnost dvou poměrů.
- Najdeme vhodnou podobnost trojúhelníků, kterými můžeme takovou situaci realizovat.

Př. 2: Vyřeš příklad 4 ještě jednou s jinak upraveným výchozím poměrem.

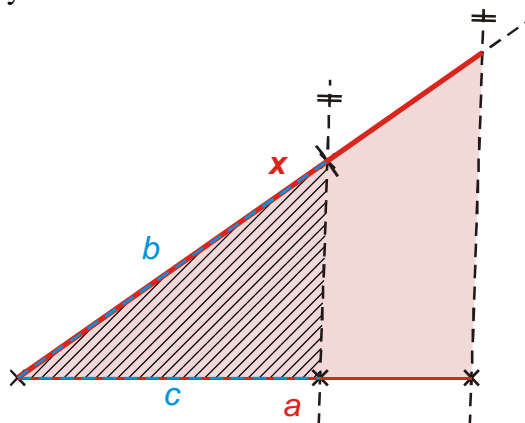
Rovnost můžeme vydělit i délkou a : $x = \frac{a \cdot b}{c} \quad / : a$.

$\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow$ rovnost poměrů dvou stran (platí u podobných trojúhelníků).

Získanou rovnost můžeme využít více způsoby.

$\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow$ úsečky o délkách b, c tvoří modrý

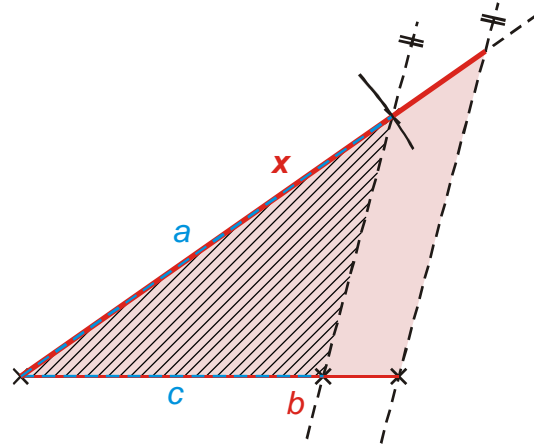
(na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami x, a . Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách c, a , druhou strany o délkách x, b .



Druhá možnost.

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{úsečky o délkách } a, c \text{ tvoří}$$

modrý (na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami x, b . Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách x, a , druhou strany o délkách c, b .



Pedagogická poznámka: Většina žáků si samozřejmě všimne, že jsme získali dva stejné obrázky jako v předchozím příkladu, ale v opačném pořadí. Pokud do konce hodiny zbývá méně než 15 minut, netrvám na tom, aby žáci dodělávali obě možnosti a jdeme dál.

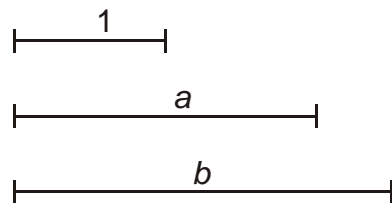
Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu nastanou zcela určité kontroverze (spíše u matematicky zdatnějších žáků), ohledně toho, že jednotková úsečka má mít délku 2 cm. Je třeba vysvětlit, že délka jednotkové úsečky může být zcela libovolná (i velikost 1 cm si lidé vybrali dle libosti) a jedině, co je důležité, jsou poměry ostatních úseček vůči této zvolené délce. Největší rejpy můžete nechat rýsovat s jednotkovou úsečkou o délce 1 cm s tím, že zbytek si přepočítají (úsečky pak mají poloviční velikosti $a = 2$ cm, $b = 2,5$ cm, aby byl zachován jejich vztah k jednotkové délce).

Př. 3: Je dána úsečka o jednotkové délce a úsečky o délkách a, b . Narýsuj:

a) úsečku o délce $c = \frac{a}{b}$, b) úsečku o délce $d = ab$,

c) úsečku o délce $e = \frac{a^2}{a+b}$.

Při rýsování používej úsečky délek $a = 4$ cm, $b = 5$ cm. Jednotkovou úsečku kresli o délce 2 cm. Výsledky zkontroluj numericky.



a) úsečka o délce $c = \frac{a}{b}$

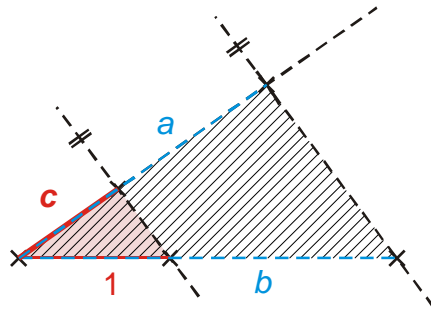
Problém: Pokud chceme použít podobnost trojúhelníků, potřebujeme na obou stranách rovnosti poměry, schází však jedna délka.

Řešení: Známe délku jednotkové úsečky \Rightarrow do rovnosti můžeme doplnit jedničku (kterou můžeme dělit dle libosti).

$$c = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{c}{1} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{c}{1} = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{úsečky o délkách } a, b \text{ tvoří modrý}$$

(na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami $c, 1$. Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách $b, 1$, druhou strany o délkách c, a .



Numerická kontrola (dosadíme do vztahu velikosti úseček a vypočteme velikost c , protože počítáme v cm, dosazujeme za jednotkovou délku 2 cm):

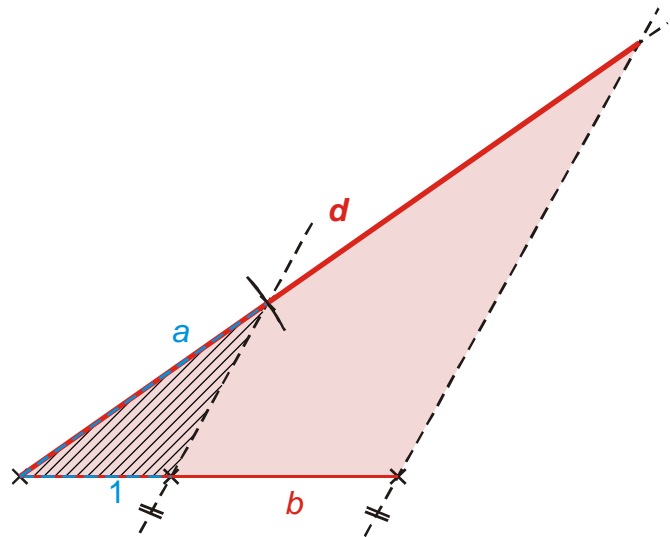
$$\frac{c}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{8}{5} \text{ cm} = 1,6 \text{ cm} = 0,8 \text{ násobek jednotkové délky.}$$

b) úsečku o délce $d = ab$

$$\text{Nejdříve upravíme výraz: } d = ab \quad /: a \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{b}{1}$$

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow \text{úsečky o délkách } a, c \text{ tvoří}$$

modrý (na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami d, b . Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách d, a , druhou strany o délkách $1, b$.



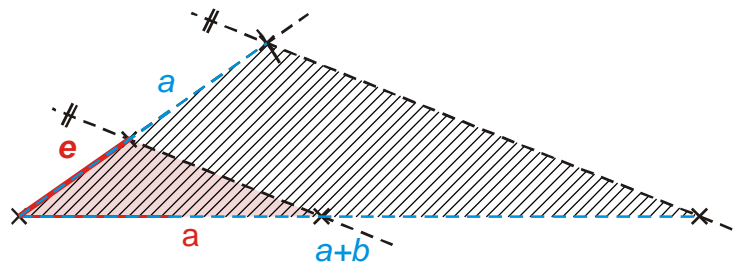
Numerická kontrola: $\frac{d}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow \frac{d}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow d = 10 \text{ cm} = 5 \text{ násobek jednotkové délky.}$

c) úsečku o délce $e = \frac{a^2}{a+b}$

$$\text{Nejdříve upravíme výraz: } e = \frac{a^2}{a+b} \quad /: a \Rightarrow \frac{e}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{e}{a} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \text{úsečky o délkách } a,$$

$a+b$ tvoří modrý (na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami e, a . Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách $a+b, a$, druhou strany o délkách e, a .



Numerická kontrola:

$$e = \frac{a^2}{a+b} \Rightarrow e = \frac{4^2}{4+5} = \frac{16}{9} \Rightarrow d = 1,78 \text{ cm} = 0,89 \text{ násobek jednotkové délky}.$$

Pedagogická poznámka: Délka jednotkové úsečky 2 cm je volena kvůli jednoduššímu rýsování i kvůli obtížnější početní kontrole.

Př. 4: Je dán obdélník o stranách a, b . Sestroj čtverec o stejném obsahu.

Pedagogická poznámka: Můžeme konstruovat všechny vzdálenosti, jejichž vztah se nám podaří upravit na poměr velikostí stran podobných trojúhelníků (i s využitím jednotkové délky).

Shrnutí: Při konstrukcích můžeme využívat i jiné planimetrické vzorce.