3.5.1 Shodná zobrazení

Předpoklady:

O zobrazení jsme mluvili, než jsme zavedli funkce. Jde o takovou relaci z první množiny do druhé, při které každému prvku z první množiny přiřazujeme maximálně jeden prvek z množiny druhé (tím je zajištěna jednoznačnost, když víme, kde začínáme, je dané, kde skončíme).

Dodatek: Funkce je zobrazení z libovolné množiny na podmnožinu R.

Př. 1: Které množiny budeme zobrazovat v planimetrii?

Zřejmě množiny bodů v rovině.

Zobrazení Z v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny. Bod X se nazývá **vzor**, bod X' se nazývá **obraz**. Zapisujeme $Z: X \to X'$.

Důležité: Zobrazujeme body $\Rightarrow$ obrazy ostatních útvarů získáme jako množinu obrazů jejich bodů.

Množinu obrazů všech bodů útvaru U značíme U' a nazýváme ji **obraz útvaru *U*.**

Př. 2: Rozhodni, které z následujících předpisů jsou zobrazení v rovině tabule .
a) Každému bodu roviny tabule přiřadíme vyznačený bod S.
b) Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na vodorovné přímce a je od původního bodu vzdálen o 20 cm.
c) Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm níže.

a) Každému bodu roviny tabule přiřadíme vyznačený bod S.
Všem bodům přiřazujeme pouze jediný bod S $\Rightarrow$ je splněna podmínka jednoznačnosti $\Rightarrow$ jde o zobrazení.

b) Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na vodorovné přímce a je od původního bodu vzdálen o 20 cm.
Ke každému bodu přiřazujeme dva body, které s původním bodem leží na vodorovné přímce jsou od něj vzdáleny 20 cm (jeden vpravo, druhý vlevo) $\Rightarrow$ není splněna podmínka jednoznačnosti $\Rightarrow$ nejde o zobrazení.

c) Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm níže.
Ke každému bodu roviny náleží pouze jeden bod, který s ním leží na svislé přímce a je o 30 cm níže $\Rightarrow$ je splněna podmínka jednoznačnosti a jde o zobrazení.

Pedagogická poznámka: Popisy v předchozím příkladu nepoužívají standardní terminologii schválně, její čas ještě přijde. Pro žáky není zcela průhledná, ti slabší by příklad vůbec neřešili.

Stejně jako u funkcí i u zobrazení můžeme rozlišovat další vlastnosti (prosté, inverzní, vzájemně jednoznačné).

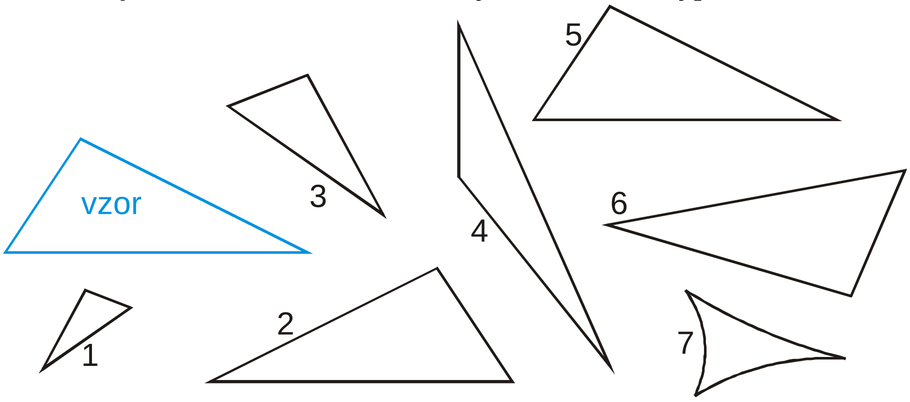
Zobrazení v bodu a) a v bodu c) předchozího příkladu se liší:

- zobrazení v bodu a) zobrazuje všechny body roviny do stejného bodu $\Rightarrow$ není prosté $\Rightarrow$ není možné obrátit směr zobrazovaní,
- zobrazení v bodu c) zobrazuje různé body roviny do různých bodů $\Rightarrow$ je prosté $\Rightarrow$ je možné obrátit směr zobrazovaní $\Rightarrow$ existuje k němu **zobrazení inverzní** (jako inverzní funkce).

Př. 3: Popiš zobrazení k zobrazení: "Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm níže.".

Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm výše.

Obraz trojúhelníka *ABC* může v různých zobrazení vypadat různě.



Pro nás budou zajímavé dvě skupiny zobrazení:

- zobrazení, ve kterých se každý trojúhelník zobrazí na trojúhelník stejného tvaru - **podobná zobrazení (podobnosti)**,
- zobrazení, ve kterých se každý trojúhelník zobrazí na shodný trojúhelník - **shodná zobrazení (shodnosti)**.

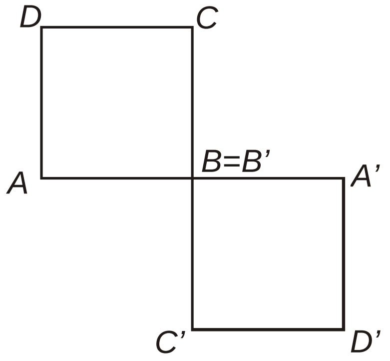
Př. 4: Jaký množinový vztah mezi shodnostmi a podobnostmi? Najdi mezi zobrazenými trojúhelníky trojúhelníky shodné a trojúhelníky podobné se vzorem. Předpokládej, že to, co vypadá shodné, je shodné, to, co vypadá podobné, je podobné.

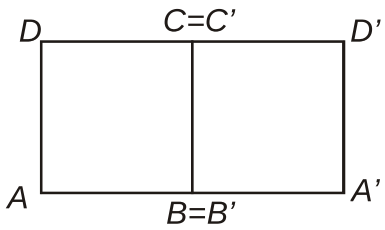
Každá shodnost je zároveň podobností $\Rightarrow$ množina shodností je podmnožinou podobností.
Trojúhelníky shodné se vzorem: 2,5, 6.
Trojúhelníky podobné se vzorem: 1, 2, 3, 5, 6.

Pedagogická poznámka: Někteří žáci se diví, že obrazem trojúhelníku může být útvar označený jako 7. Jde o obraz v kruhové inverzi, která převádí kružnice na přímky.

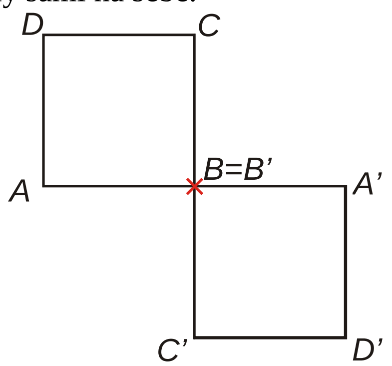
Př. 5: Nakresli obrazy čtverce *ABCD* ve dvou základních shodnostech, které se probírají už na základní škole.

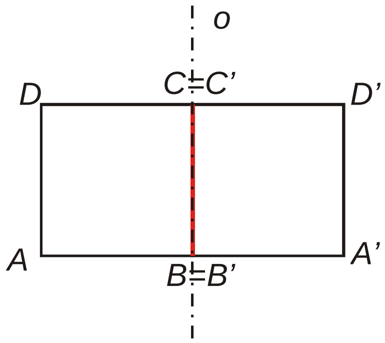
Středová souměrnost **Osová souměrnost**



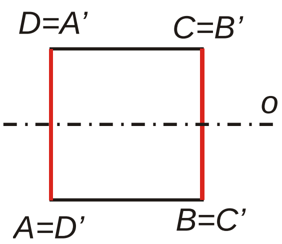


Na obou předchozích obrázcích si červeně vyznačíme body, které jsou zajímavé tím, že se zobrazily sami na sebe.





Takovým bodům říkáme **samodružné body** (druží se samy se sebou). Na pravém obrázku je dokonce **samodružný** celý **útvar** - úsečka *BC*.

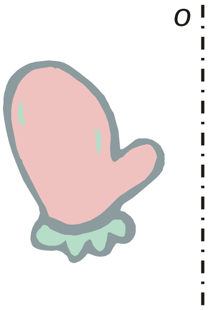


Na tomto obrázku vidíme dokonce dvě samodružné úsečky *AD* a *BC*. Obě úsečky se zobrazí samy na sebe (a jsou **samodružné**), i když má každá z nich pouze jeden samodružný bod (S_{AD} případně S_{BC}).

Pedagogická poznámka: Následující část hodiny je třeba ukazovat na tabuli pomocí předmětů. Vhodné jsou například chňapky na horké hrnce (ať už skutečné nebo vystřižené z papíru). Žákům radím, ať si přeloží papír a vystřihnout si tak dva palčáky najednou, u každého si nabarví jednu stranu, aby rozeznali levý a pravý.

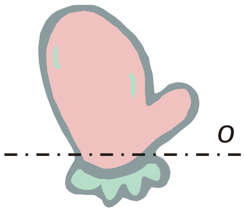
Názorně si můžeme ukázat zobrazení pomocí placatých předmětů.

Př. 6: Umísti druhou rukavici tak, aby byla zobrazena naznačenou osovou souměrností.

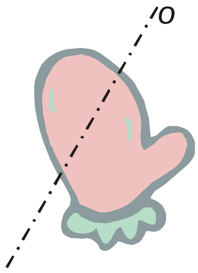


a)

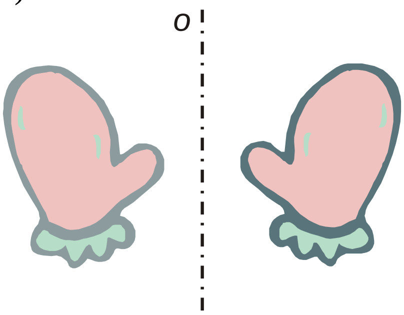
b)

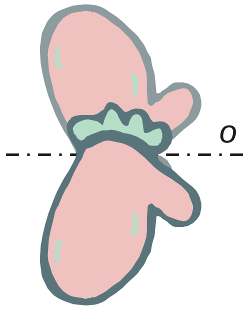


c)

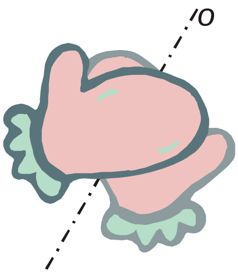


a)



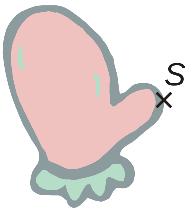


b)

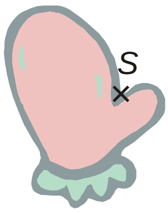


c)

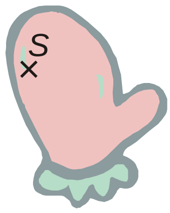
Př. 7: Umísti druhou rukavici tak, aby byla zobrazena naznačenou středovou souměrností.



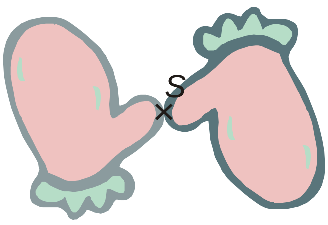
a)



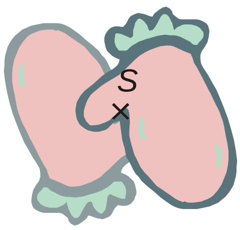
b)



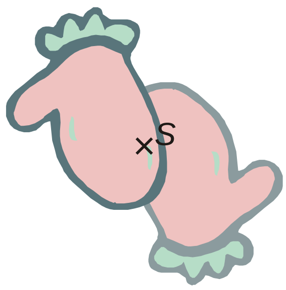
c)



a)



b)



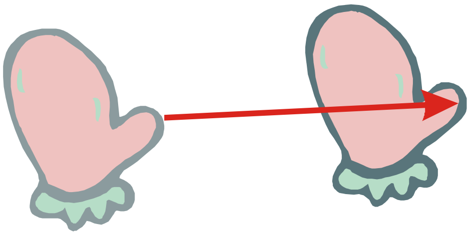
c)

Př. 8: Najdi další dvě základní shodná zobrazení. Odpovídají dalším dvěma základním pohybům, které můžeme s rukavicí na tabuli provést.

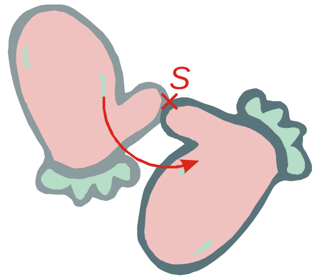
S rukavicí můžeme udělat další dva jednoduché pohyby.

Rukavici můžeme posunout libovolným směrem.

Rukavici můžeme otočit o libovolný úhel.



Shodné zobrazení **posunutí.**

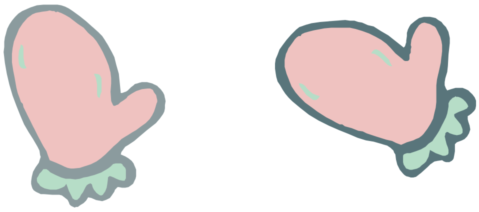


Shodné zobrazení **otočení.**

Každé shodné zobrazení je možné získat složením osových souměrností, středových souměrností, posunutí a otočení.

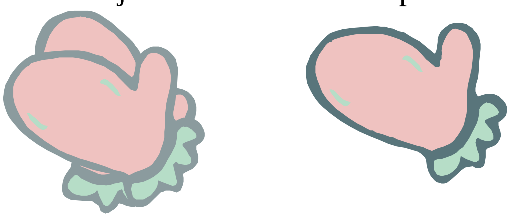
Př. 9: Rozlož následující shodnosti na sled základních shodností.

a)



b)

a) Shodnost je složena z otočení a posunutí.



b) Shodnost je složena z osové souměrnosti a otočení.

Př. 10: Rozděl všech shodnosti na dvě skupiny podle toho, jak si při umísťování druhého palčáku postupoval.

V jedné skupině jsou zobrazení, která nevyžadovala převrácení palčáku $\Rightarrow$ takovým říkáme **přímé shodnosti** (ze základních shodností do této skupiny patří středová souměrnost, otočení a posunutí).
Ve druhé skupině jsou zobrazení, která vyžadovala převrácení palčáku $\Rightarrow$ takovým říkáme **nepřímé shodnosti** (ze základních shodností do této skupiny patří osová souměrnost).

Pro všechny shodnosti platí:

- obrazem přímky je přímka, obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- obrazem polopřímky je polopřímka, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny je polorovina, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
- obrazem úhlu je shodný úhel,
- obrazem útvaru je shodný útvar.

Shrnutí: