

### 3.5.1 Shodná zobrazení

#### Předpoklady:

O zobrazení jsme mluvili, než jsme zavedli funkce. Jde o takovou relaci z první množiny do druhé, při které každému prvku z první množiny přiřazujeme maximálně jeden prvek z množiny druhé (tím je zajištěna jednoznačnost, když víme, kde začínáme, je dané, kde skončíme).

**Dodatek:** Funkce je zobrazení z libovolné množiny na podmnožinu  $R$ .

**Př. 1:** Které množiny budeme zobrazovat v planimetrii?

Zřejmě množiny bodů v rovině.

Zobrazení  $Z$  v rovině je předpis, který každému bodu  $X$  roviny přiřazuje právě jeden bod  $X'$  roviny. Bod  $X$  se nazývá **vzor**, bod  $X'$  se nazývá **obraz**. Zapisujeme  $Z : X \rightarrow X'$ .

**Důležité:** Zobrazujeme body  $\Rightarrow$  obrazy ostatních útvarů získáme jako množinu obrazů jejich bodů.

Množinu obrazů všech bodů útvaru  $U$  značíme  $U'$  a nazýváme ji **obraz útvaru  $U$** .

**Př. 2:** Rozhodni, které z následujících předpisů jsou zobrazení v rovině tabule.

- Každému bodu roviny tabule přiřadíme vyznačený bod  $S$ .
- Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na vodorovné přímce a je od původního bodu vzdálen o 20 cm.
- Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm níže.

a) Každému bodu roviny tabule přiřadíme vyznačený bod  $S$ .

Všem bodům přiřazujeme pouze jediný bod  $S \Rightarrow$  je splněna podmínka jednoznačnosti  $\Rightarrow$  jde o zobrazení.

b) Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na vodorovné přímce a je od původního bodu vzdálen o 20 cm.

Ke každému bodu přiřazujeme dva body, které s původním bodem leží na vodorovné přímce a jsou od něj vzdáleny 20 cm (jeden vpravo, druhý vlevo)  $\Rightarrow$  není splněna podmínka jednoznačnosti  $\Rightarrow$  nejde o zobrazení.

c) Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm níže.

Ke každému bodu roviny náleží pouze jeden bod, který s ním leží na svislé přímce a je o 30 cm níže  $\Rightarrow$  je splněna podmínka jednoznačnosti a jde o zobrazení.

**Pedagogická poznámka:** Popisy v předchozím příkladu nepoužívají standardní terminologii schválně, její čas ještě přijde. Pro žáky není zcela průhledná, ti slabší by příklad vůbec neřešili.

Stejně jako u funkcí i u zobrazení můžeme rozlišovat další vlastnosti (prosté, inverzní, vzájemně jednoznačné).

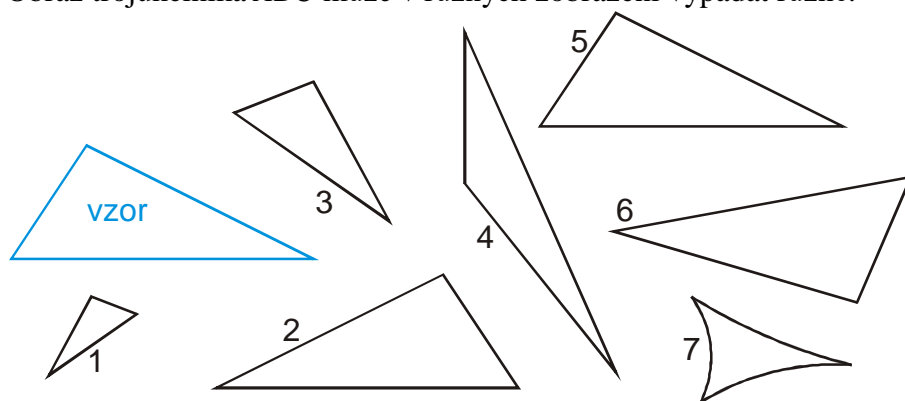
Zobrazení v bodu a) a v bodu c) předchozího příkladu se liší:

- zobrazení v bodu a) zobrazuje všechny body roviny do stejného bodu  $\Rightarrow$  není prosté  $\Rightarrow$  není možné obrátit směr zobrazování,
- zobrazení v bodu c) zobrazuje různé body roviny do různých bodů  $\Rightarrow$  je prosté  $\Rightarrow$  je možné obrátit směr zobrazování  $\Rightarrow$  existuje k němu **zobrazení inverzní** (jako inverzní funkce).

**Př. 3:** Popiš inverzní zobrazení k zobrazení: "Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm níže."

Každému bodu roviny přiřadíme bod, který leží s původním bodem na svislé přímce a leží o 30 cm výše.

Obraz trojúhelníka  $ABC$  může v různých zobrazení vypadat různě.



Pro nás budou zajímavé dvě skupiny zobrazení:

- zobrazení, ve kterých se každý trojúhelník zobrazí na trojúhelník stejného tvaru - **podobná zobrazení (podobnosti)**,
- zobrazení, ve kterých se každý trojúhelník zobrazí na shodný trojúhelník - **shodná zobrazení (shodnosti)**.

**Př. 4:** Jaký je množinový vztah mezi shodnostmi a podobnostmi? Najdi mezi zobrazenými trojúhelníky trojúhelníky shodné a trojúhelníky podobné se vzorem. Předpokládej, že to, co vypadá shodné, je shodné, to, co vypadá podobné, je podobné.

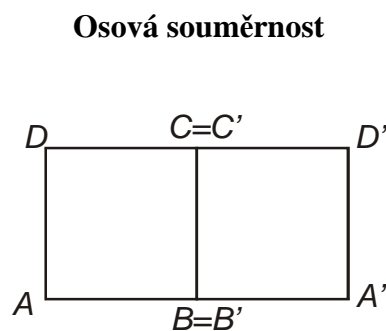
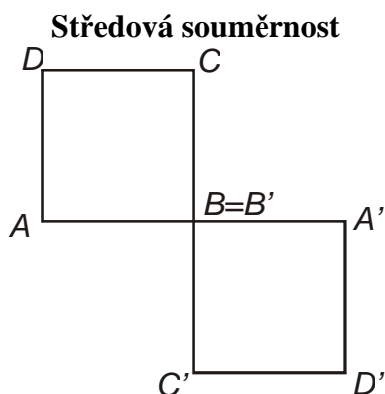
Každá shodnost je zároveň podobností  $\Rightarrow$  množina shodností je podmnožinou podobností.

Trojúhelníky shodné se vzorem: 2, 5, 6.

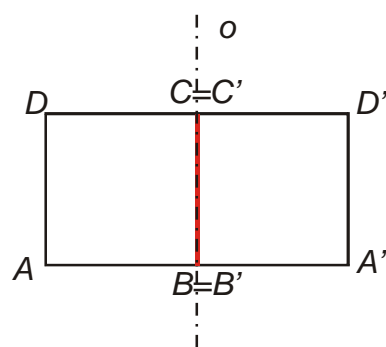
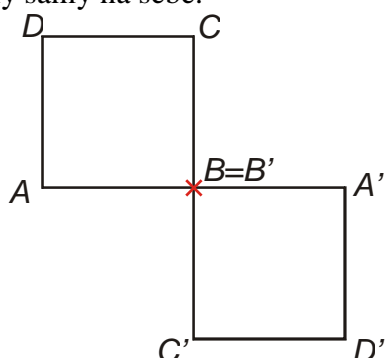
Trojúhelníky podobné se vzorem: 1, 2, 3, 5, 6.

**Pedagogická poznámka:** Někteří žáci se diví, že obrazem trojúhelníku může být útvar označený jako 7. Jde o obraz v kruhové inverzi, která převádí kružnice na přímky.

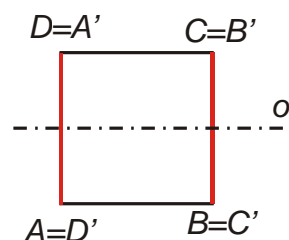
**Př. 5:** Nakresli obrazy čtverce  $ABCD$  ve dvou základních shodnostech, které se probírají už na základní škole.



Na obou předchozích obrázcích si červeně vyznačíme body, které jsou zajímavé tím, že se zobrazily samy na sebe.



Takovým bodům říkáme **samodružné body** (druží se samy se sebou). Na pravém obrázku je dokonce **samodružný celý útvar** - úsečka  $BC$ .

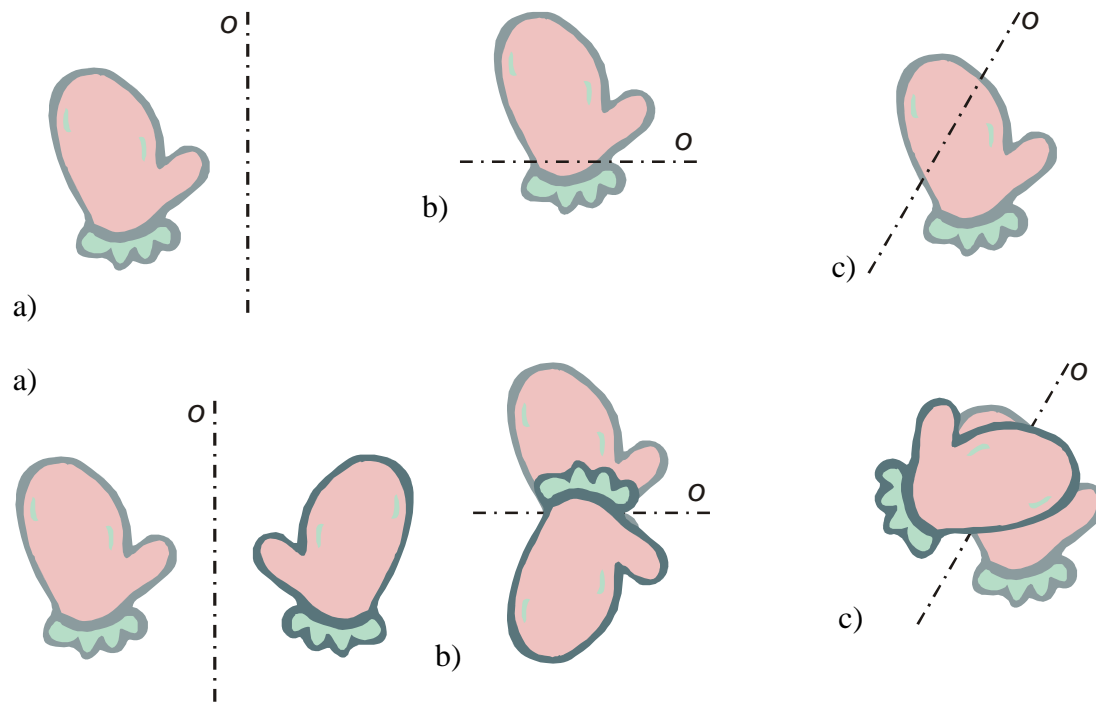


Na tomto obrázku vidíme dokonce dvě samodružné úsečky  $AD$  a  $BC$ . Obě úsečky se zobrazí samy na sebe (a jsou **samodružné**), i když má každá z nich pouze jeden samodružný bod ( $S_{AD}$  případně  $S_{BC}$ ).

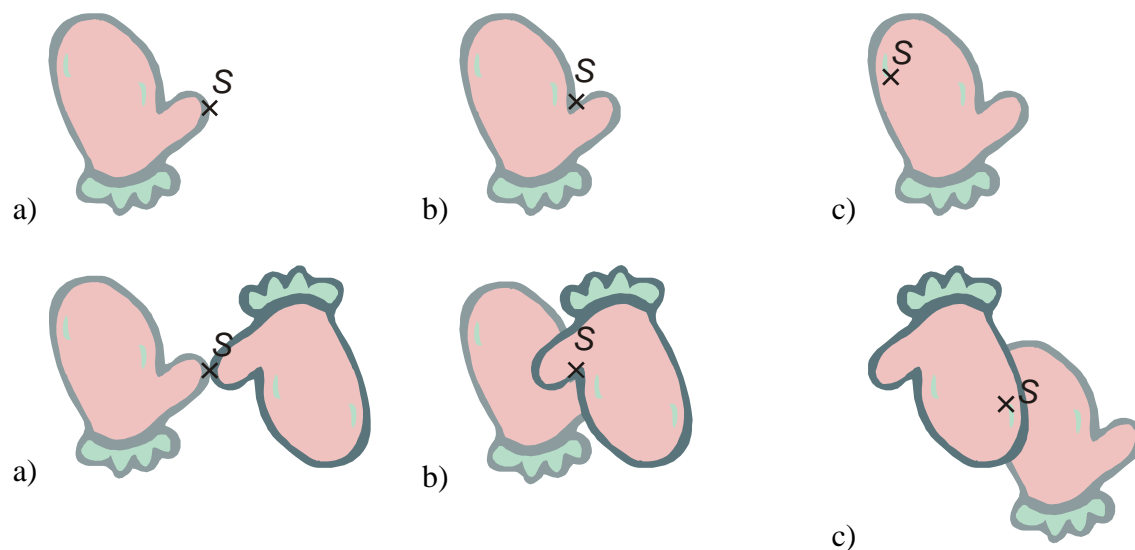
**Pedagogická poznámka:** Následující část hodiny je třeba ukazovat na tabuli pomocí předmětů. Vhodné jsou například chňapky na horké hrnce (ať už skutečné nebo vystřížené z papíru). Žákům radím, ať si přeloží papír a vystříhnou si tak dva palčáky najednou, u každého si nabarví jednu stranu, aby rozeznali levý a pravý.

Názorně si můžeme ukázat zobrazení pomocí placatých předmětů.

**Př. 6:** Umístí druhou rukavici tak, aby byla zobrazena naznačenou osovou souměrností.



**Př. 7:** Umístí druhou rukavici tak, aby byla zobrazena naznačenou středovou souměrností.

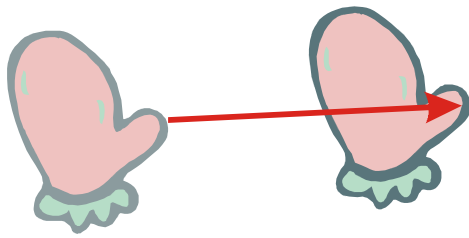


**Př. 8:** Najdi další dvě základní shodná zobrazení. Odpovídají dalším dvěma základním pohybům, které můžeme s rukavicí na tabuli provést.

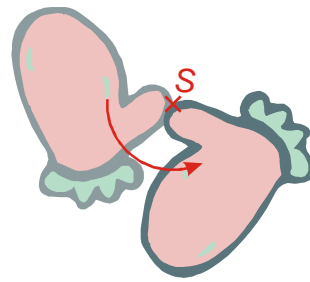
S rukavicí můžeme udělat další dva jednoduché pohyby.

Rukavici můžeme posunout libovolným směrem.

Rukavici můžeme otočit o libovolný úhel.



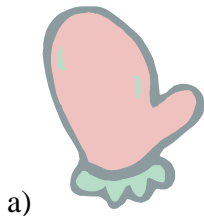
Shodné zobrazení **posunutí**.



Shodné zobrazení **otočení**.

Každé shodné zobrazení je možné získat složením osových souměrností, středových souměrností, posunutí a otočení.

**Př. 9:** Rozlož následující shodnosti na sled základních shodností.



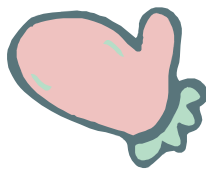
a)



b)



a) Shodnost je složena z otočení a posunutí.



b) Shodnost je složena z osové souměrnosti a otočení.



**Př. 10:** Rozděl všechny shodnosti na dvě skupiny podle toho, jak si při umístování druhého palčáku postupoval.

V jedné skupině jsou zobrazení, která nevyžadovala převrácení palčáku  $\Rightarrow$  takovým říkáme **přímé shodnosti** (ze základních shodností do této skupiny patří středová souměrnost, otočení a posunutí).

Ve druhé skupině jsou zobrazení, která vyžadovala převrácení palčáku  $\Rightarrow$  takovým říkáme **nepřímé shodnosti** (ze základních shodností do této skupiny patří osová souměrnost).

Pro všechny shodnosti platí:

- obrazem přímky je přímka, obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- obrazem polopřímky je polopřímka, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny je polorovina, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
- obrazem úhlu je shodný úhel,
- obrazem útvaru je shodný útvar.

**Shrnutí:**