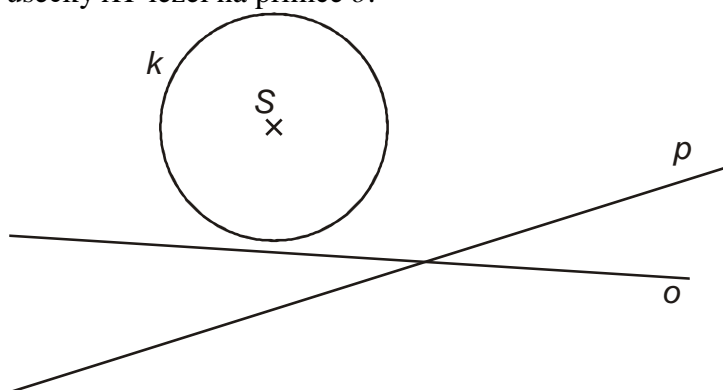


### 3.5.3 Příklady na osovou souměrnost

**Předpoklady:** 3502

**Př. 1:** Jsou dány dvě různoběžné přímky  $o, p$  a kružnice  $k(S, r)$ . Sestroj úsečku  $XY$  tak, aby byla kolmá k přímce  $o$ , bod  $X$  ležel na přímce  $p$ , bod  $Y$  ležel na kružnici  $k$  a střed úsečky  $XY$  ležel na přímce  $o$ .



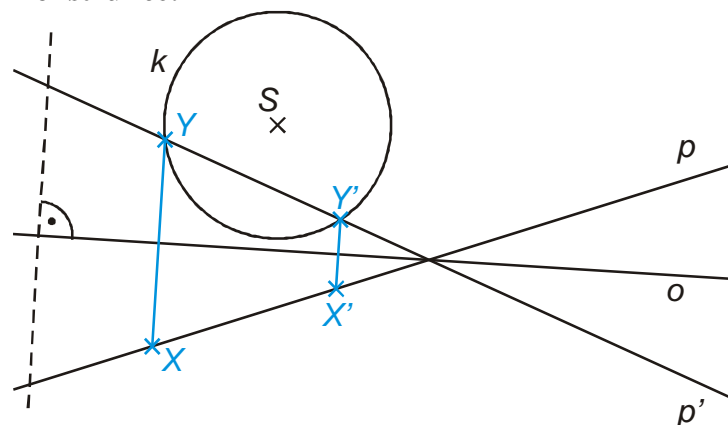
**Problém:**

- bod  $X$  leží na přímce  $p$ , ale nevíme kde,
- bod  $Y$  leží na kružnici  $k$ , ale nevíme kde,

$\Rightarrow$  o obou hledaných bodech máme neúplnou informaci, která nám neumožňuje jejich sestavení, přesto je příklad evidentně dostatečně zadán a nemá nekonečně mnoho řešení.

**Nápad:** zatím nepoužitá informace ze zadání: úsečka  $XY$  je k přímce  $o$  kolmá a leží na ní její střed  $\Rightarrow$  body  $XY$  jsou osově souměrné podle osy  $o \Rightarrow$  vezmeme všechny body, které mohou být  $X$  (tedy celou přímku  $p$ ) a zobrazíme je v osové souměrnosti  $O(o)$ , hledaný bod  $X$  se musí zobrazit na bod  $Y$  (tedy na kružnici  $k$ )  $\Rightarrow$  hledaný bod  $Y$  najdeme jako průsečík kružnice  $k$  a přímky  $p'$  (bod  $X$  pak pomocí bodu  $Y$  a kolmice na přímku  $o$ ).

**Konstrukce:**



**Zápis konstrukce:**

1.  $p, o, k$
2.  $p'; O(o): p \rightarrow p'$
3.  $Y; Y = p' \cap k$
4.  $X; O(o): Y \rightarrow X$
5.  $XY$

**Diskuse:** Úloha může mít 0 – 2 řešení v závislosti na vzájemné poloze přímek  $p, o$  a kružnice  $k$ .

**Dodatek:** Příklad samozřejmě můžeme řešit i zobrazením kružnice  $k$  v osové souměrnosti  $O(o)$ .

**Př. 2:** Je dána přímka  $o$  a na ní bod  $C$ . Dále jsou dány dvě navzájem různoběžné přímky  $a$ ,  $b$  obě různé od přímky  $o$ . Sestroj všechny rovnoramenné trojúhelníky  $ABC$  tak, aby strana  $AB$  byla základnou, těžnice  $t_C$  ležela na přímce  $o$  a platilo  $A \in a$ ,  $B \in b$ .

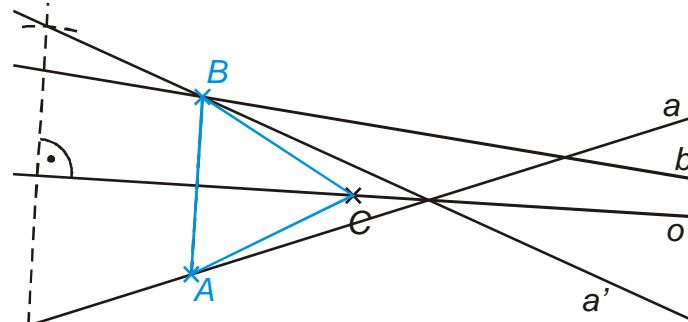
**Problém:**

- vrchol  $A$  leží na přímce  $a$ , ale nevíme kde,
- vrchol  $B$  leží na přímce  $b$ , ale nevíme kde,

$\Rightarrow$  o obou hledaných bodech máme neúplnou informaci, která nám neumožňuje jejich sestavení, přesto je příklad evidentně dostatečně zadán a nemá nekonečně mnoho řešení

**Nápad:** zatím nepoužitá informace ze zadání: body  $A$ ,  $B$  jsou vrcholy základny rovnoramenného trojúhelníka, všechny rovnoramenné trojúhelníky jsou osově souměrné (osa souměrnosti trojúhelníka se shoduje s osou základny)  $\Rightarrow$  body  $A$ ,  $B$  jsou osově souměrné v souměrnosti  $O(o)$   $\Rightarrow$  vezmeme všechny body, které mohou být  $A$  (tedy celou přímku  $a$ ) a zobrazíme je v osové souměrnosti  $O(o)$ , hledaný bod  $A$  se musí zobrazit na bod  $B$  (tedy na přímku  $b$ )  $\Rightarrow$  hledaný bod  $B$  najdeme jako průsečík přímek  $b$  a  $a'$  (bod  $A$  pak pomocí bodu  $B$  a kolmice na přímce  $o$ ).

**Konstrukce:**



**Zápis konstrukce:**

1.  $a, b, o$
2.  $a'; O(o): a \rightarrow a'$
3.  $B; B = a' \cap b$
4.  $A; O(o): B \rightarrow A$
5.  $ABC$

**Diskuse:** Úloha má vždy jedno řešení (přímky  $a'$  a  $b$  jsou různoběžné a mají vždy jeden průsečík).

**Dodatek:** Příklad samozřejmě můžeme řešit i zobrazením přímky  $b$  v osové souměrnosti  $O(o)$ .

**Př. 3:** Najdi společné rysy předchozích příkladů.

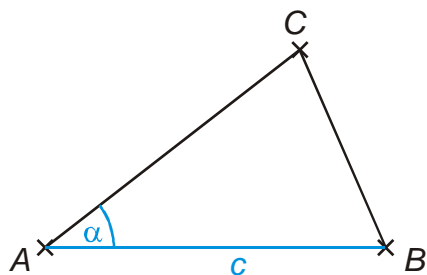
V obou příkladech:

- hledali jsme dva body, oba body byly určeny pouze částečně,
- zbývající informace v zadání obsahovaly informaci o vzájemném vztahu hledaných bodů (konkrétně osová souměrnost),
- pomocí osové souměrnosti (zobrazením všech „podezřelých“ bodů) jsme informace o poloze jednoho bodu použili ke konstrukci druhého bodu,
- první bod jsme pak pomocí osové souměrnosti našli jako obraz zkonstruovaného druhého bodu,

$\Rightarrow$  osová souměrnost (jak uvidíme dále shodnosti obecně) nám umožňuje „dát dohromady“ částečné informace o konstrukci dvou bodů.

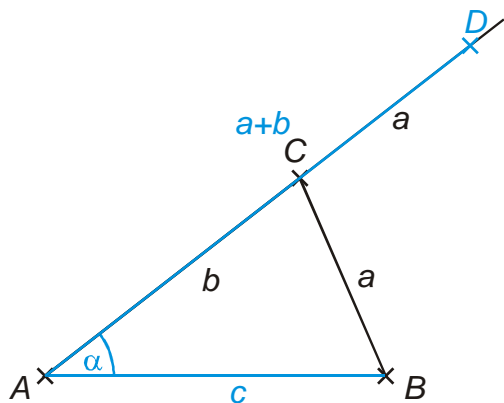
**Př. 4:** Sestroj trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 50^\circ$ ,  $a + b = 7 \text{ cm}$ .

**Náčrtek:**



Jak do náčrtku zakreslit délku  $a+b$  ?

Zkusíme sledovat konstrukci: snadno sestrojíme trojúhelník  $ABD$



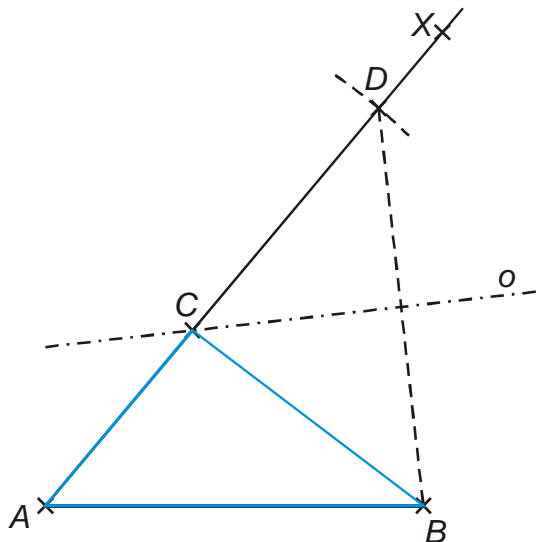
Jak zjistíme polohu bodu  $C$  na přímce  $AD$  ?

Platí  $|AD| = a+b$ ,  $|AC| = a \Rightarrow |CD| = b \Rightarrow$  trojúhelník  $BCD$  je rovnoramenný a tedy i osově souměrný podle osy úsečky  $BD \Rightarrow$  vrchol  $C$  leží na:

- úsečce  $AD$
- ose úsečky  $BD$

$\Rightarrow$  vrchol  $C$  snadno nalezneme jako průsečík

**Konstrukce:**



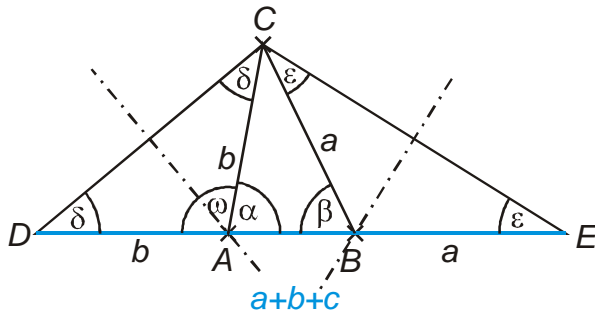
**Zápis konstrukce:**

1.  $AB; |AB| = c = 5 \text{ cm}$
2.  $\sphericalangle BAX; |\sphericalangle BAX| = 50^\circ$
3.  $D; D \in \text{přímka } AX; |AD| = a+b = 7 \text{ cm}$
4.  $o$ ; osa úsečky  $BD$
5.  $C; C = AD \cap o$
6.  $\triangle ABC$

**Diskuse:** Úloha má jedno řešení.

**Př. 5:** Sestroj trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:  $o = 10 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

**Náčrtek:**



Využijeme zkušenosti z předchozího příkladu (hledání vrcholu pomocí osové souměrnosti). Zkoumáme rovnoramenný trojúhelník  $DAC$ : pro úhel  $\omega$  platí:  $\omega = 180^\circ - \alpha$  (zbytek do  $180^\circ$ ), ze součtu úhlů v trojúhelníku:  $\omega + \delta + \delta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ$

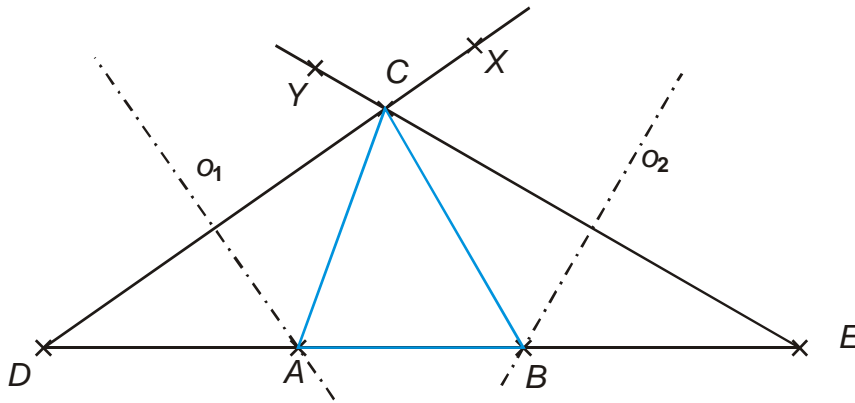
$$2\delta = \alpha \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}\alpha.$$

Podobně platí:  $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$

$\Rightarrow$  můžeme sestavit trojúhelník  $DEC$  a pak pomocí osových souměrností najít vrcholy  $A, B$ .

**Konstrukce:**

**Zápis konstrukce:**



1.  $DE; |DE| = c = 10\text{cm}$
2.  $\sphericalangle EDX; |\sphericalangle EDX| = 35^\circ$
3.  $\sphericalangle DEY; |\sphericalangle DEY| = 30^\circ$
4.  $C; C \in \text{H} \rightarrow DX \cap \text{H} \rightarrow EY$
5.  $o_1$ ; osa úsečky  $DC$
6.  $o_2$ ; osa úsečky  $EC$
7.  $A; A \in o_1 \cap DE$
8.  $B; B \in o_2 \cap DE$
9.  $\triangle ABC$

**Př. 6:** Petáková:

strana 79/cvičení 39

strana 80/cvičení 42

strana 80/cvičení 49 a) d)

**Shrnutí:** Osová souměrnost nám umožňuje dát dohromady částečné informace o konstruovaných bodech.