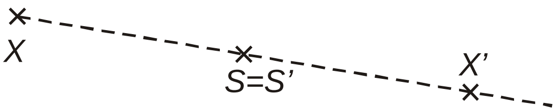
3.5.4 Středová souměrnost

Předpoklady: 3502

Př. 1: Neznámé shodné zobrazení je dáno takto:
Jsou dány dva různé body *X*, *S*. Shodnost BLABLABLA je shodné zobrazení, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod *S* je středem úsečky XX',
2. bodu *S* bod $S' = S$.
Rozhodni, o kterou shodnost jde. Najdi obrazy bodů *X* a *S* v této shodnosti. Které body jsou v této shodnosti samodružné? Navrhni zápis této shodnosti do zápisů konstrukce.



Jde o středovou souměrnost.
Samodružný je pouze střed souměrnosti *S*.
Středovou souměrnost se středem *S* zapisujeme jako $S(S)$.

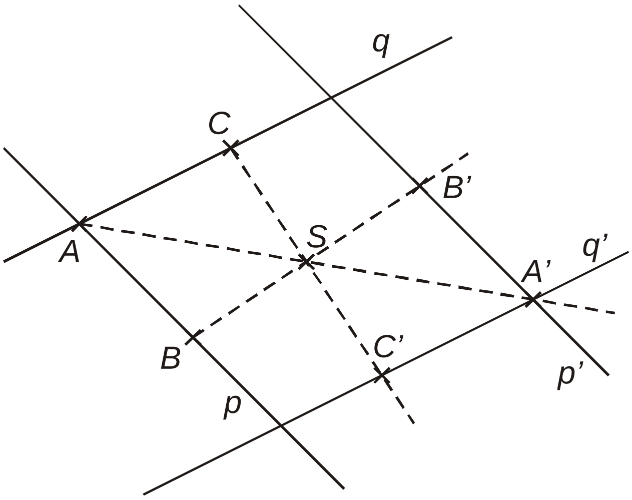
Jsou dány dva různé body *X*, *S*. Středová souměrnost $S(S)$ je shodné zobrazení, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod *S* je středem úsečky XX'.
2. bodu *S* bod $S' = S$.

Př. 2: Je dán bod *S*. Najdi alespoň jednu přímku samodružnou ve středové souměrnosti $S(S)$.

Samodružná přímka: její body se zobrazují na body ležící na stejné přímce $\Rightarrow$ samodružná je každá přímka procházející středem souměrnosti.

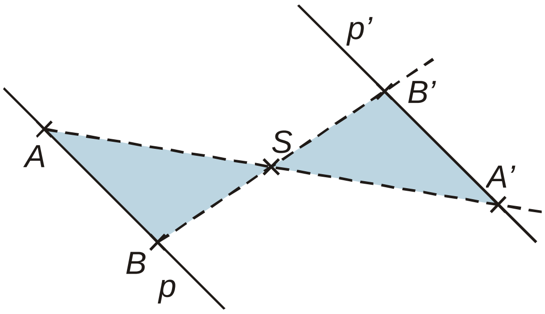
Př. 3: Je dán bod *S* a dvě různoběžné přímky *p*, *q*, které neprocházejí tímto bodem. Najdi obrazy těchto přímek ve středové souměrnosti $S(S)$. Jaký je vztah mezi přímkou a jejím obrazem? Dokaž. Navrhni co nejúspornější postup, jak najít ve středové souměrnosti obraz přímky.

Nejjistější způsob, jak zobrazit přímku: zobrazíme dva její body, obraz přímky prochází touto dvojicí bodů $\Rightarrow$ jako jeden ze zobrazovaných bodů zvolíme průsečík obou přímek.



Zdá se, že obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná ($p \parallel p', q \parallel q'$).

Důkaz:



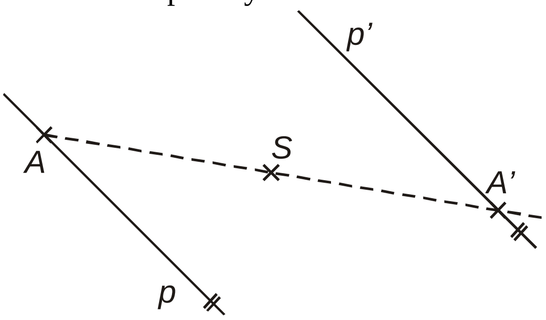
Pro trojúhelníky ABS a $A'B'S$ platí:

- $|AS| = |A'S|$ (z definice středové souměrnosti),
- $|BS| = |B'S|$ (z definice středové souměrnosti),
- $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'|$ (dva vrcholové úhly),

$\Rightarrow$ trojúhelníky ABS a $A'B'S$ jsou shodné podle věty *sus* $\Rightarrow$ platí: $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SA'B'|$ $\Rightarrow$ přímky p a p' jsou rovnoběžné (střídavé úhly u přímek proťatých příčkou).

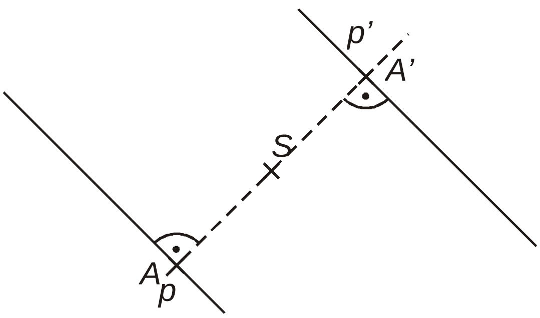
Rovnoběžnost můžeme využít pro rychlejší zobrazování přímky.

Zobrazíme ve středové souměrnosti jeden bod na přímce p. Obraz přímky p najdeme jako rovnoběžku s přímkou p bodem A'.



Pokud máme trojúhelník s ryskou.

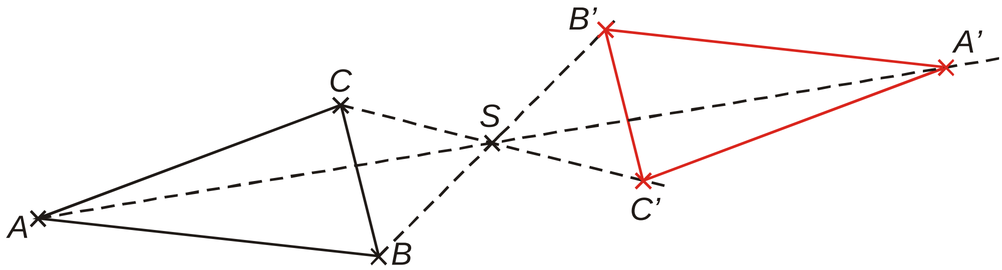
Z bodu S vedeme k přímce p kolmici, její patu zobrazíme ve středové souměrnosti a získaným bodem vedeme kolmici na kolmici k přímce p.



Pedagogická poznámka: Cílem předchozího příkladu není jen narýsování dvou obrazů, ale hlavně přemýšlení o tom, co a jak dělám. Pokud někdo zvolí body zcela náhodně,

snažím se ho zastavit, aby svůj postup vylepšil.
Z matematického pohledu není konstrukce přes kolmici žádné vylepšení, ale praktické provedení je o něco rychlejší.

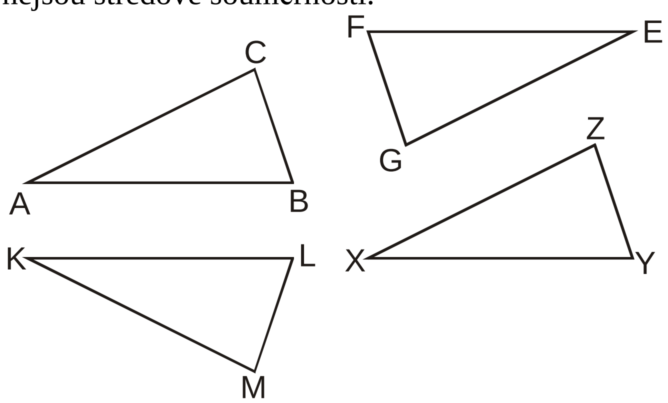
Př. 4: Je dán trojúhelník ABC. Najdi obraz tohoto trojúhelníku v libovolné středové souměrnosti se středem v bodě, který neleží na jeho obvodu. Rozhodni, zda středová souměrnost patří mezi přímé nebo nepřímé shodnosti.



Středová souměrnost je přímá shodnost.

Pedagogická poznámka: Tvar trojúhelníka dopředu neřešíme. Jakmile mají žáci rozhodnout o tom, zda je shodnost přímá nebo nepřímá, správný tvar se samozřejmě hodí. Bavíme se o tom při kontrole.

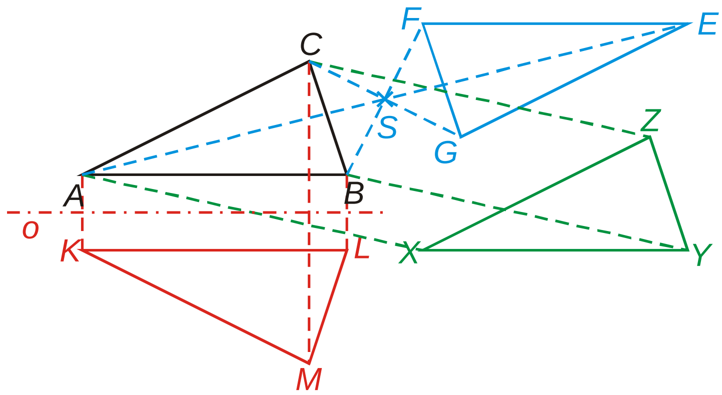
Př. 5: Rozhodni, které z trojúhelníků na obrázcích jsou středově souměrné s trojúhelníkem ABC. Jak by bylo možné najít jejich střed souměrnosti? Urči typ shodností, které nejsou středové souměrnosti.



Z tvarů trojúhelníků je vidět, že:

- obrazem bodu A jsou body E, K¸ X;
- obrazem bodu B jsou body F, L¸ Y;
- obrazem bodu C jsou body G, M¸ Z.

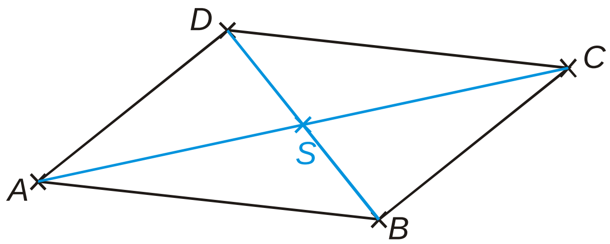
Střed souměrnosti musí ležet na přímce určené bodem a obrazem $\Rightarrow$ spojíme odpovídající si body a zjišťujeme, zda se protnou v jednom bodě.



Z obrázku vidíme, že:

- trojúhelník *EFG* je obrazem trojúhelníku *ABC* ve středové souměrnosti se středem *S*,
- trojúhelník *KLM* je obrazem trojúhelníku *ABC* v osové souměrnosti s osou *o*,
- trojúhelník *XYZ* je obrazem trojúhelníku *ABC* v posunutí (*AX*).

Př. 6: Dokaž, že platí věta. Jestliže se ve čtyřúhelníku *ABCD* půlí úhlopříčky, je čtyřúhelník rovnoběžníkem.



Označíme si průsečík úhlopříček *S*.

- úhlopříčka *AC* se půlí $\Rightarrow$ $|AS| = |CS|$ $\Rightarrow$ bod *C* je obrazem bodu *A* v $S(S)$, bod *A* je obrazem bodu *C* v $S(S)$,
- úhlopříčka *BD* se půlí $\Rightarrow$ $|BS| = |DS|$ $\Rightarrow$ bod *D* je obrazem bodu *B* v $S(S)$, bod *B* je obrazem bodu *D* v $S(S)$.

$\Rightarrow$

přímka *CD* je obrazem přímky *AB* v $S(S)$ $\Rightarrow$ $AB \parallel CD$,

přímka *AD* je obrazem přímky BC v $S(S)$ $\Rightarrow$ $AD \parallel BC$,

$\Rightarrow$ protější strany čtyřúhelníku jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ čtyřúhelník *ABCD* je rovnoběžník.

Shrnutí: