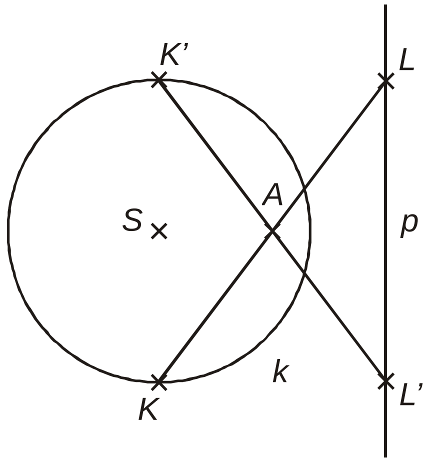
3.5.5 Příklady na středovou souměrnost

Předpoklady: 3504

Př. 1: Je dána kružnice $k(S;3\,\text{cm})$, bod A; $|SA| = 2\,\text{cm}$ a přímka *p*; $|Ap| = 4\,\text{cm}$, která nemá s kružnicí *k* žádný společný bod. Najdi všechny úsečky *KL*; $K \in k$, $L \in p$ takové, aby bod *A* byl jejich středem.

Náčrtek:



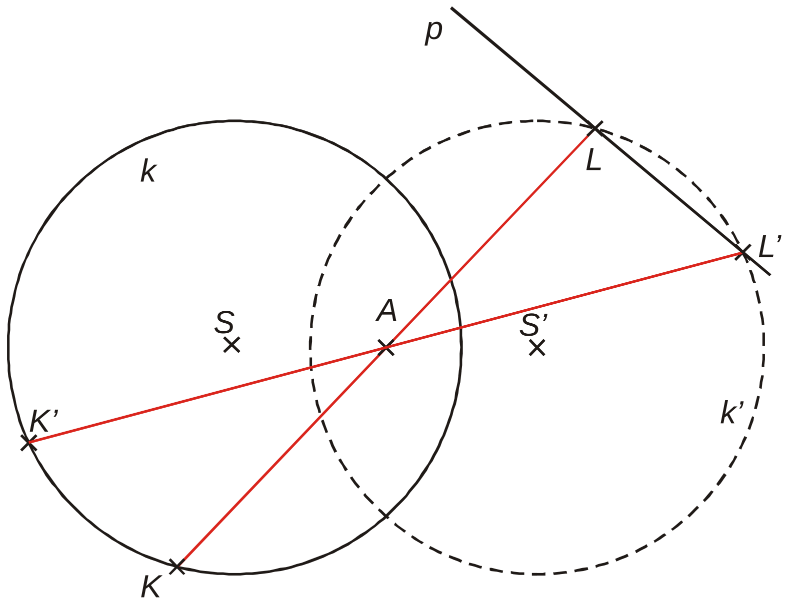
Problém:

- Bod *K* leží na kružnici *k*, ale nevíme kde,
- Bod *L* leží na přímce *p*, ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body *K* a *L*.

Řešení: Body *K*, *L* jsou středově souměrné se středem souměrnosti v bodu *A* (leží na jedné přímce a platí $|KA| = |LA|$) $\Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být *K* (celou kružnici *k*), a zobrazíme je ve středové souměrnosti $S(A)$. Správný bod se zobrazí na bod *L* (tedy na bod na přímce *p*).

Konstrukce:



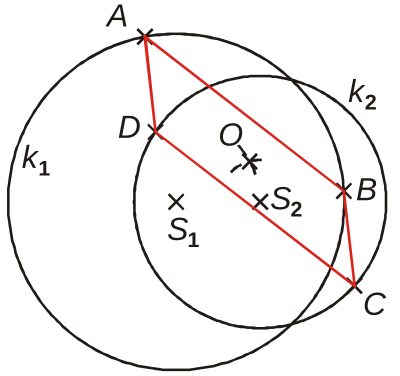
Zápis konstrukce:

1. $k; k(S, r = 3\,\text{cm})$
2. $A; |SA| = 2\,\text{cm}$
3. $p; |pA| = 4\,\text{cm}$
4. $k'; S(A) > k \to k'$
5. $L, L'; L \cup L' = k' \cap p$
6. $K; K = k \cap \leftrightarrow LA$
7. $K'; K' = k \cap \leftrightarrow L'A$
8. $K'L'; KL$

Rozbor:
Příklad má žádné, jedno nebo dvě řešení podle počtu průsečíku kružnice k' s přímkou *p*.

Př. 2: Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1;4\,\text{cm})$ a $k_2(S_2;3\,\text{cm})$, $|S_1S_2| = 2\,\text{cm}$. Uvnitř obou kružnic leží bod *O*, $|S_1O| = 2\,\text{cm}$, $|S_2O| = 1\,\text{cm}$. Sestroj všechny rovnoběžníky *ABCD* tak, aby platilo $A \in k_1$, $B \in k_1$, $C \in k_2$, $D \in k_2$ a bod *O* je střed *ABCD*.

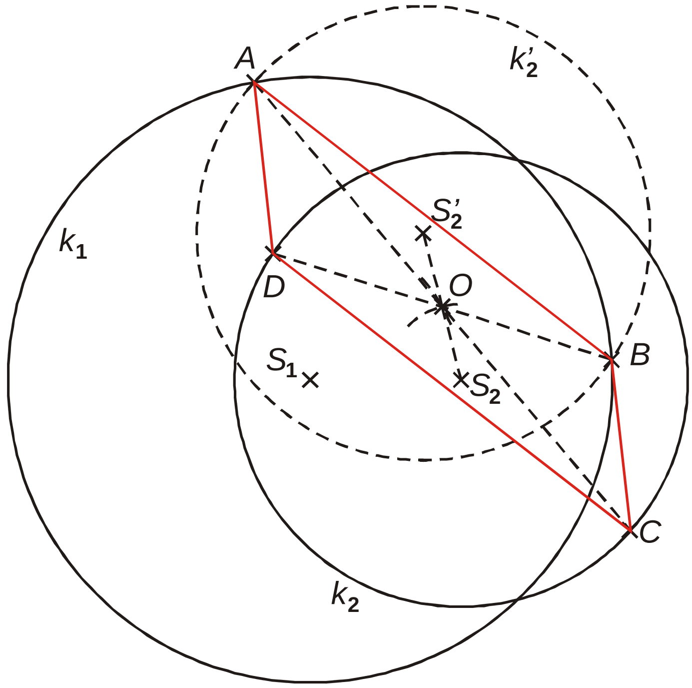
Náčrtek:



Problém:
- Body *A*, *B* leží na kružnici k_1, ale nevíme kde,
- Body *C*, *D* leží na kružnici k_2, ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body.
Řešení: Body *A*, *C* leží s bodem *O* na jedné přímce (úhlopříčce rovnoběžníku), platí $|AO| = |CO|$ (úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí) $\Rightarrow$ body *A*, *C* jsou středově souměrné se středem souměrnosti v bodu *O* $\Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být *C* (celou kružnici k_2), a zobrazíme je ve středové souměrnosti $S(O)$. Správný bod se zobrazí na bod *A* (tedy na bod na kružnici k_2).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:
1. $k_1; k_1(S_1, r_1 = 4\,\text{cm})$
2. $k_2; k_2(S_2, r_2 = 3\,\text{cm}), |S_1S_2| = 2\,\text{cm}$
3. $O; |S_1O| = 2\,\text{cm}, |S_2O| = 1\,\text{cm}$
4. $k_2'; S(O) > k_2 \to k_2'$
5. $A, B; A \cup B = k_2' \cap k_1$
6. $C; C = k_2 \cap \leftrightarrow AO$
7. $D; D = k_2 \cap \leftrightarrow BO$
8. $ABCD$

Rozbor:
Příklad má žádné nebo jedno řešení podle počtu průsečíku kružnic k_1 s kružnicí k_2'.

Dodatek: Samozřejmě můžeme zobrazovat i ve středové souměrnosti kružnici k_1. Obrázek by však byl o dost větší.

Pedagogická poznámka: Je dobré připomenout, že předchozí příklad je velmi podobný prvnímu příkladu.

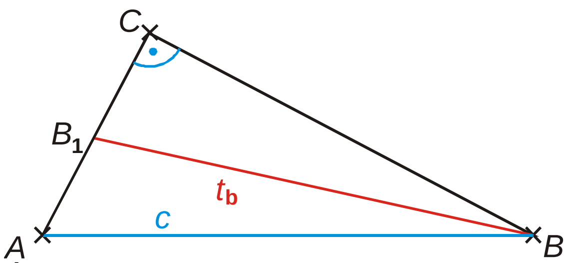
Př. 3: (BONUS) Rozhodni, jaké podmínky by zadání předchozího příkladu muselo splňovat, aby nalezený rovnoběžník byl pravoúhelník.

Rovnoběžník je pravoúhelníkem $\Rightarrow$ obě úhlopříčky jsou shodné (vyplývá se shodnosti trojúhelníků *ABC* a *BAD*).
Bod *O* je středem rovnoběžníku $\Rightarrow$ bod *O* je průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku $\Rightarrow$ trojúhelníky *AOB* a *COD* jsou rovnoramenné a tedy i osově souměrné podle přímky $S_{AB}S_{CD}$ (na které leží i bod *O*) $\Rightarrow$ celý obrázek musí být souměrný podle přímky $S_{AB}S_{CD}$ $\Rightarrow$ na této přímce leží i středy S_1, S_2 kružnic k_1, k_2.

Pokud má být nalezený rovnoběžník pravoúhelníkem, musí bod *O* ležet na přímce S_1S_2.

Př. 4: Je dána úsečka BB_1, $|BB_1| = 5\text{cm}$. Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem γ, tak aby úsečka BB_1 byla jejich těžnicí t_B a platilo $c = 6\text{cm}$.

Náčrtek:



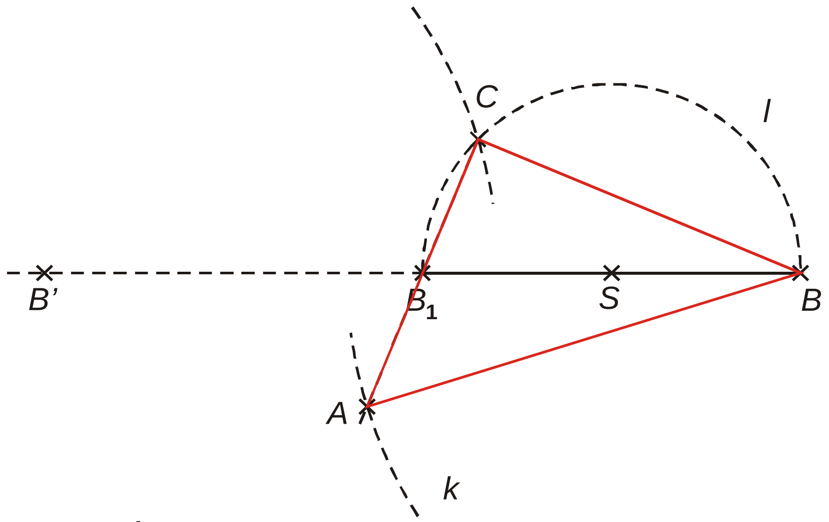
Úloha je polohová.
Problém: Pro oba hledané vrcholy máme pouze jedinou informaci:

- vrchol *A* leží na kružnici $k(B;c)$, ale nevíme kde,
- vrchol *C* leží na kružnici $l\left(S_{BB_1};\frac{|BB_1|}{2}\right)$ (Thaletova kružnice), ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body *A*, *C*.
Řešení: Bod B_1 je středem úsečky *AC* $\Rightarrow$ body A, *C* jsou středově souměrné podle bodu B_1 $\Rightarrow$ zobrazíme všechny body, které mohou být *A* (kružnici $k(B;c)$) v $S(B_1)$, bod *C* najdeme jako průsečík kružnic $k'(B';c)$ a $l\left(S_{BB_1};\frac{|BB_1|}{2}\right)$.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:
$1.\ BB_1; |BB_1| = t_b = 5\text{cm}$



$2. k; k(B; c = 6\,\text{cm})$
$3. l; l = \tau_{BB_1}$
$4. B'; S(B_1): B \to B'$
$5. k'; k(B'; c = 6\,\text{cm})$
$6. C; C = l \cup k'$
$7. CB_1$
$8. A; A = CB_1 \cup k$
$9. \Delta ABC$

Rozbor: Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

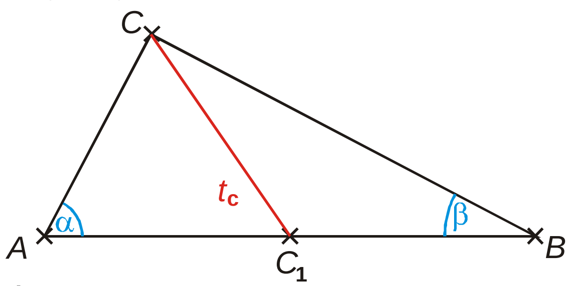
Př. 5: Najdi společný rys všech tří předchozích konstrukčních příkladů v této hodině. Řešili jsme podobné příklady i pomocí osové souměrnosti?

Ve všech předchozích příkladech jsme u hledaných bodů znali málo informací (leží na kružnici, leží na přímce) $\Rightarrow$ hledali jsme vztah mezi dvěma body (středovou souměrnost) $\Rightarrow$ zobrazením množiny „podezřelých bodů“ se nám podařilo „spojit“ neúplné informace o dvou bodech dohromady a jeden z hledaných bodů sestrojit.
Stejný typ příkladů se vyskytoval i u osové souměrnosti (první dva příklady v hodině 030503).

Shodná zobrazení nám umožňují „spojit neúplné informace“ o dvou bodech a tím tyto body zkonstruovat.

Př. 6: Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = 5\,\text{cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky v nichž CC_1 je těžnicí a platí $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Náčrtek:



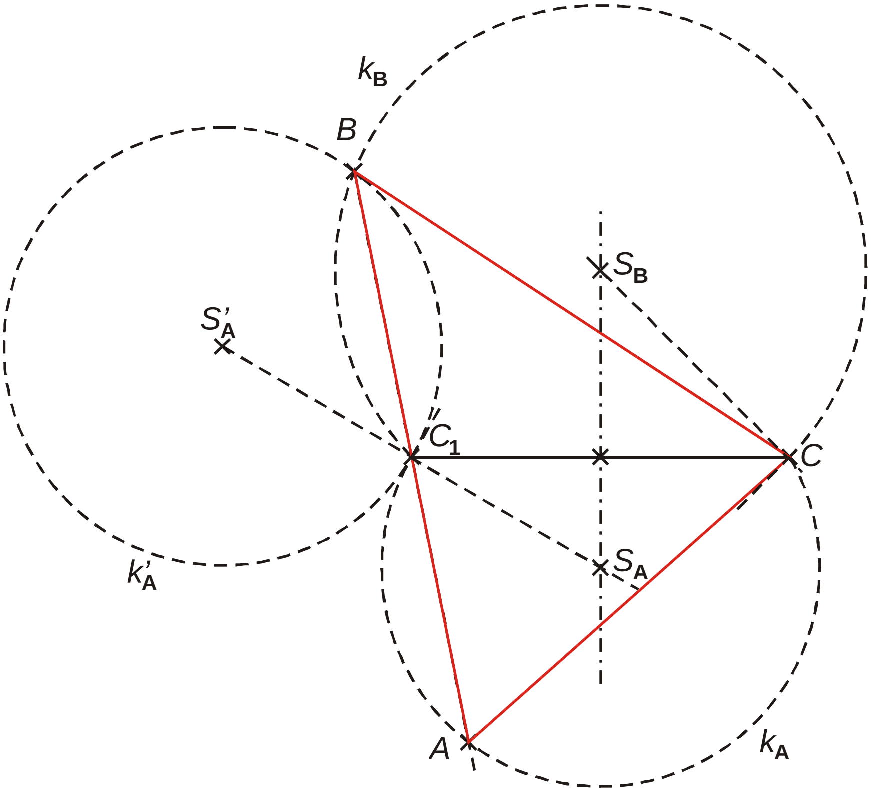
Úloha je polohová.
Problém: Pro oba hledané vrcholy máme pouze jedinou informaci:

- vrchol *A* leží na množině bodů, ze kterých je úsečka CC_1 vidět pod úhlem $\alpha = 60°$, ale nevíme kde,
- vrchol *B* leží na množině bodů, ze kterých je úsečka CC_1 vidět pod úhlem $\beta = 45°$, ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body *A*, *B*.

Řešení: Bod C_1 je středem úsečky AB $\Rightarrow$ body A, B jsou středově souměrné podle bodu C_1 $\Rightarrow$ zobrazíme všechny body, které mohou být *A* (množinu bodů) v $S(C_1)$, bod *B* najdeme jako průsečík zobrazené množiny bodů pro vrchol *A* a množiny bodů pro vrchol *B*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

$1. CC_1; |CC_1| = t_c = 5\,\text{cm}$

$2. k_A; k_A \subset \{X \in \rho; |\sphericalangle CXC_1| = 60°\}$

$3. k_B; k_B \subset \{X \in \rho; |\sphericalangle CXC_1| = 45°\}$

$4. k'_A; S(C_1): k_A \to k'_A$

$6. B; B = k_B \cup k'_A$

$7. BC_1$

$8. A; A = BC_1 \cup k_A$

$9. \Delta ABC$

Rozbor: Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

Pedagogická poznámka: Pro některé žáky je v předchozím příkladu trochu moc kružnic. Proto nekreslíme množiny bodů celé (další řešení bychom nezískali) a značíme je podle vrcholů, k jejichž nalezení mají sloužit.

Př. 7: Petáková:
strana 79/cvičení 37
strana 80/cvičení 48 a) d)

Shrnutí: Pomocí středové souměrnosti můžeme „spojovat neúplné informace“ o dvou bodech a tím je konstruovat.