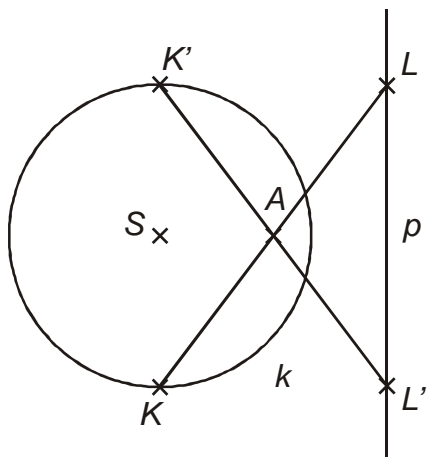


3.5.5 Příklady na středovou souměrnost

Předpoklady: 3504

Př. 1: Je dána kružnice $k(S; 3\text{ cm})$, bod A ; $|SA| = 2\text{ cm}$ a přímka p ; $|Ap| = 4\text{ cm}$, která nemá s kružnicí k žádný společný bod. Najdi všechny úsečky KL ; $K \in k$, $L \in p$ takové, aby bod A byl jejich středem.

Náčrtek:



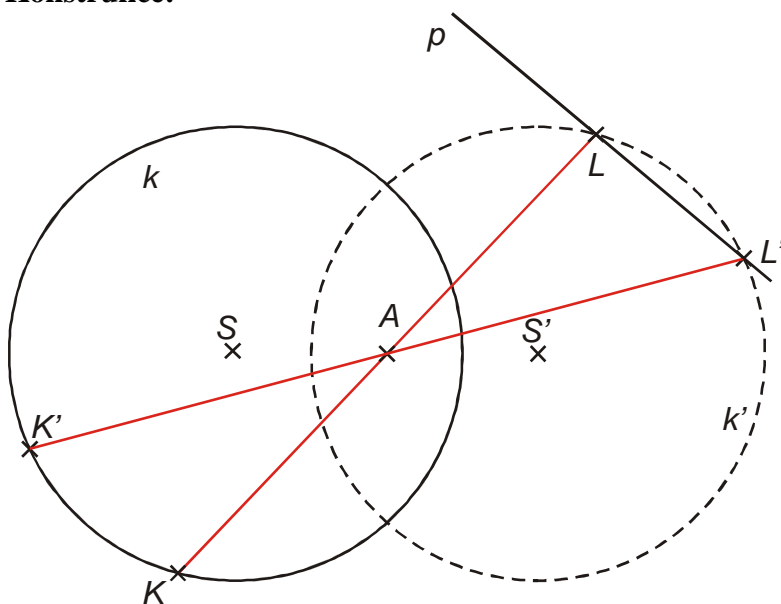
Problém:

- Bod K leží na kružnici k , ale nevíme kde,
- Bod L leží na přímce p , ale nevíme kde,

\Rightarrow máme dvě neúplné informace \Rightarrow hledáme spojitost mezi body K a L .

Řešení: Body K, L jsou středově souměrné se středem souměrnosti v bodu A (leží na jedné přímce a platí $|KA| = |LA|$) \Rightarrow vezmeme všechny body, které mohou být K (celou kružnicí k), a zobrazíme je ve středové souměrnosti $S(A)$. Správný bod se zobrazí na bod L (tedy na bod na přímce p).

Konstrukce:



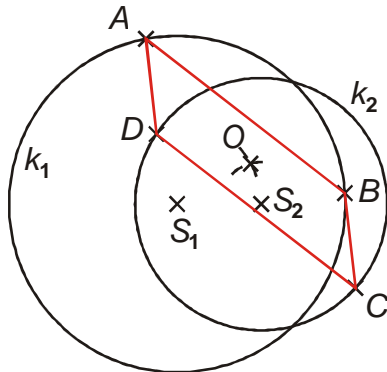
Zápis konstrukce:

1. $k; k(S, r = 3\text{ cm})$
2. $A; |SA| = 2\text{ cm}$
3. $p; |pA| = 4\text{ cm}$
4. $k'; S(A) > k \rightarrow k'$
5. $L, L'; L \cup L' = k' \cap p$
6. $K; K = k \cap \leftrightarrow LA$
7. $K'; K' = k \cap \leftrightarrow L'A$
8. $K'L'; KL$

Rozbor:

Příklad má žádné, jedno nebo dvě řešení podle počtu průsečíku kružnice k' s přímkou p .

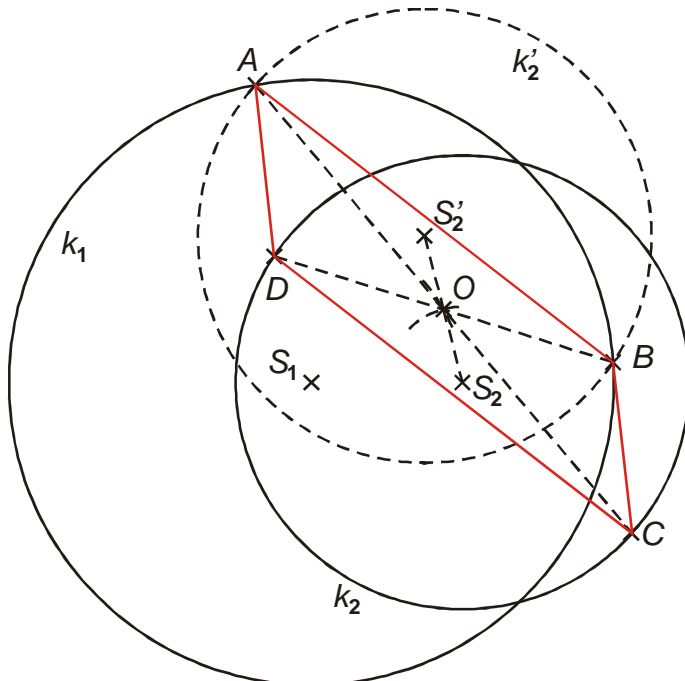
Př. 2: Jsou dány dvě kružnice $k_1 (S_1; 4 \text{ cm})$ a $k_2 (S_2; 3 \text{ cm})$, $|S_1 S_2| = 2 \text{ cm}$. Uvnitř obou kružnic leží bod O , $|S_1 O| = 2 \text{ cm}$, $|S_2 O| = 1 \text{ cm}$. Sestroj všechny rovnoběžníky $ABCD$ tak, aby platilo $A \in k_1$, $B \in k_1$, $C \in k_2$, $D \in k_2$ a bod O je střed $ABCD$.

Náčrtek:**Problém:**

- Body A, B leží na kružnici k_1 , ale nevíme kde,
- Body C, D leží na kružnici k_2 , ale nevíme kde,

\Rightarrow máme dvě neúplné informace \Rightarrow hledáme spojitost mezi body.

Řešení: Body A, C leží s bodem O na jedné přímce (úhlopříčce rovnoběžníku), platí $|AO| = |CO|$ (úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí) \Rightarrow body A, C jsou středově souměrné se středem souměrnosti v bodu $O \Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být C (celou kružnici k_2), a zobrazíme je ve středové souměrnosti $S(O)$. Správný bod se zobrazí na bod A (tedy na bod na kružnici k_2).

Konstrukce:**Zápis konstrukce:**

1. $k_1; k_1 (S_1, r_1 = 4 \text{ cm})$
2. $k_2; k_2 (S_2, r_2 = 3 \text{ cm}), |S_1 S_2| = 2 \text{ cm}$
3. $O; |S_1 O| = 2 \text{ cm}, |S_2 O| = 1 \text{ cm}$
4. $k'_2; S(O) > k_2 \rightarrow k'_2$
5. $A, B; A \cup B = k'_2 \cap k_1$
6. $C; C = k_2 \cap \leftrightarrow AO$
7. $D; D = k_2 \cap \leftrightarrow BO$
8. $ABCD$

Rozbor:

Příklad má žádné nebo jedno řešení podle počtu průsečíku kružnic k_1 s kružnicí k'_2 .

Dodatek: samozřejmě můžeme zobrazovat se středové souměrnosti kružnici k_1 . Obrázek by však byl o dost větší.

Pedagogická poznámka: Je dobré připomenout, že předchozí příklad je velmi podobný prvnímu příkladu.

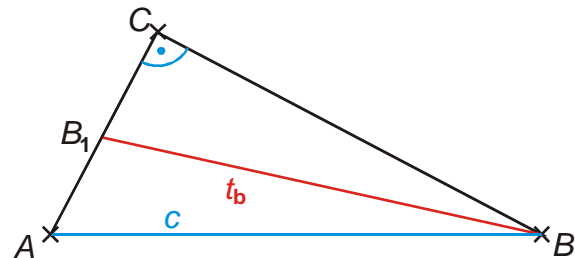
Př. 3: (BONUS) Rozhodni, jaké podmínky by zadání předchozího příkladu muselo splňovat, aby nalezený rovnoběžník byl pravoúhelník.

Rovnoběžník je pravoúhelníkem \Rightarrow obě úhlopříčky jsou shodné (vyplývá se shodnosti trojúhelníků ABC a BAD).

Bod O je středem rovnoběžníku \Rightarrow bod O je průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku \Rightarrow trojúhelníky AOB a COD jsou rovnostranné a tedy i osově souměrné podle přímky $S_{AB}S_{CD}$ (na které leží i bod O) \Rightarrow celý obrázek musí být souměrný podle přímky $S_{AB}S_{CD}$ \Rightarrow na této přímce leží i středy S_1, S_2 kružnic k_1, k_2 .

Pokud má být nalezený rovnoběžník pravoúhelníkem, musí bod O ležet na přímce S_1S_2 .

Př. 4: Je dána úsečka BB_1 , $|BB_1| = 5$ cm. Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem γ , tak aby úsečka BB_1 byla jejich těžnicí t_B a platilo $c = 6$ cm.

Náčrtek:

Úloha je polohová.

Problém: Pro oba hledané vrcholy máme pouze jedinou informaci:

- vrchol A leží na kružnici $k(B; c)$, ale nevíme kde,
- vrchol C leží na kružnici $l\left(S_{BB_1}; \frac{|BB_1|}{2}\right)$ (Thaletova kružnice), ale nevíme kde,

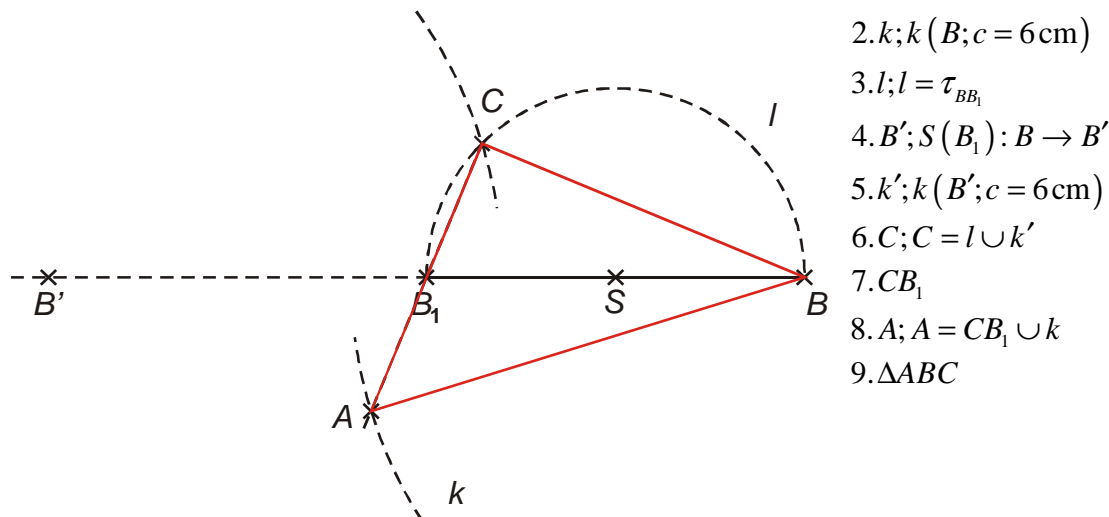
\Rightarrow máme dvě neúplné informace \Rightarrow hledáme spojitost mezi body A, C .

Řešení: Bod B_1 je středem úsečky AC \Rightarrow body A, C jsou středově souměrné podle bodu B_1 \Rightarrow zobrazíme všechny body, které mohou být A (kružnici $k(B; c)$) v $S(B_1)$, bod C najdeme

jako průsečík kružnic $k'(B'; c)$ a $l\left(S_{BB_1}; \frac{|BB_1|}{2}\right)$.

Konstrukce:**Zápis konstrukce:**

1. $BB_1; |BB_1| = t_b = 5$ cm



2. $k; k(B; c = 6 \text{ cm})$
3. $l; l = \tau_{BB_1}$
4. $B'; S(B_1): B \rightarrow B'$
5. $k'; k(B'; c = 6 \text{ cm})$
6. $C; C = l \cup k'$
7. CB_1
8. $A; A = CB_1 \cup k$
9. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

Př. 5: Najdi společný rys všech tří předchozích konstrukčních příkladů v této hodině. Řešili jsme podobné příklady i pomocí osové souměrnosti?

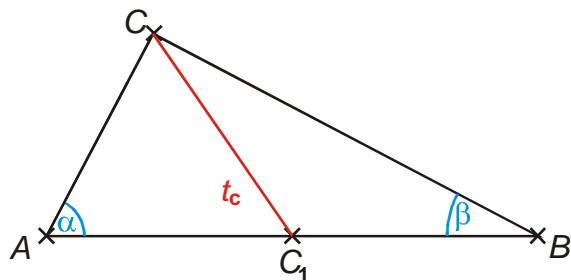
Ve všech předchozích příkladech jsme u hledaných bodů znali málo informací (leží na kružnici, leží na přímce) \Rightarrow hledali jsme vztah mezi dvěma body (středovou souměrnost) \Rightarrow zobrazením množiny „podezřelých bodů“ se nám podařilo „spojit“ neúplné informace o dvou bodech dohromady a jeden z hledaných bodů sestrojil.

Stejný typ příkladů se vyskytoval i u osové souměrnosti (první dva příklady v hodině 030503).

Shodná zobrazení nám umožňují „spojit neúplné informace“ o dvou bodech a tím tyto body zkonstruovat.

Př. 6: Je dána úsečka CC_1 , $|CC_1| = 5 \text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky v nichž CC_1 je těžnicí a platí $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Náčrtek:



Úloha je polohová.

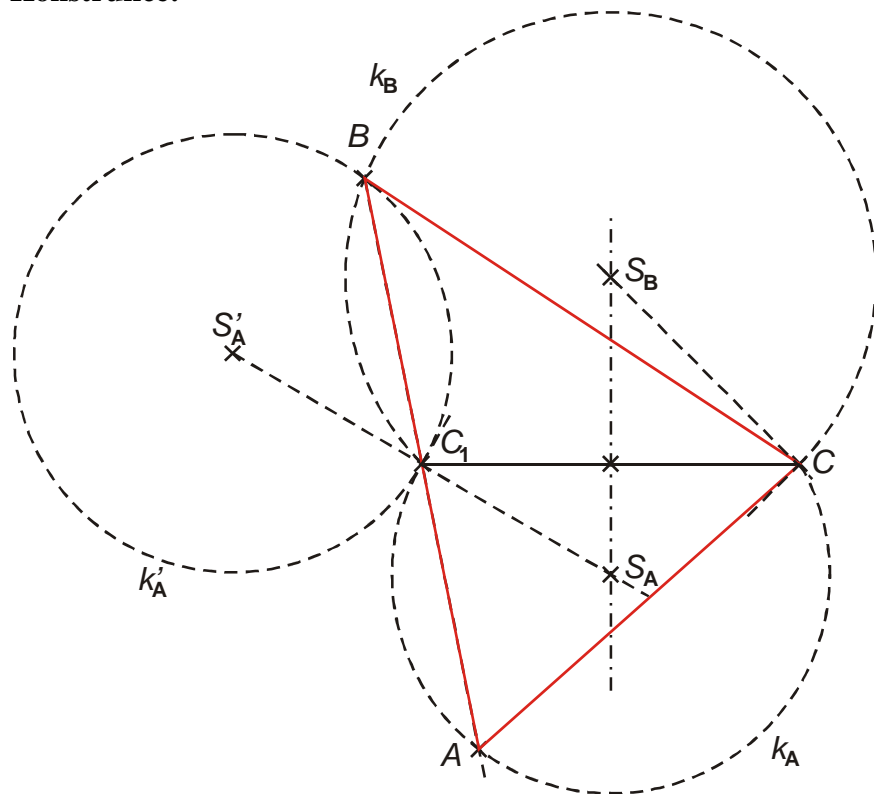
Problém: Pro oba hledané vrcholy máme pouze jedinou informaci:

- vrchol A leží na množině bodů, ze kterých je úsečka CC_1 vidět pod úhlem $\alpha = 60^\circ$, ale nevíme kde,
- vrchol B leží na množině bodů, ze kterých je úsečka CC_1 vidět pod úhlem $\beta = 45^\circ$, ale nevíme kde,

\Rightarrow máme dvě neúplné informace \Rightarrow hledáme spojitost mezi body A, B .

Řešení: Bod C_1 je středem úsečky $AB \Rightarrow$ body A, B jsou středově souměrné podle bodu C_1
 \Rightarrow zobrazíme všechny body, které mohou být A (množinu bodů) v $S(C_1)$, bod B najdeme jako průsečík zobrazené množiny bodů pro vrchol A a množiny bodů pro vrchol B .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $CC_1; |CC_1| = t_c = 5 \text{ cm}$
2. $k_A; k_A \subset \{X \in \rho; |\sphericalangle CXC_1| = 60^\circ\}$
3. $k_B; k_B \subset \{X \in \rho; |\sphericalangle CXC_1| = 45^\circ\}$
4. $k'_A; S(C_1): k_A \rightarrow k'_A$
6. $B; B = k_B \cup k'_A$
7. BC_1
8. $A; A = BC_1 \cup k'_A$
9. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

Pedagogická poznámka: Pro některé žáky je v předchozím příkladu trochu moc kružnic.

Proto nekreslíme množiny bodů celé (další řešení bychom nezískali) a značíme je podle vrcholů, k jejichž nalezení mají sloužit.

Př. 7: Petáková:
 strana 79/cvičení 37
 strana 80/cvičení 48 a) d)

Shrnutí: Pomocí středové souměrnosti můžeme „spojovat neúplné informace“ o dvou bodech a tím je konstruovat.