

3.4.6 Posunutí

Předpoklady: 030405

Úsečka – část přímky, krajní body a vše, co je mezi nimi.



Orientovaná úsečka?

- Úsečka se šipkou \Rightarrow víme, který bod je první (počáteční) a který je druhý (koncový).
- Píšeme \overrightarrow{AB} nebo \overline{AB} .

- Kreslíme pomocí šipky u koncového bodu:

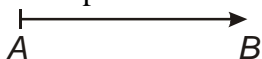
Délka orientované úsečky \overrightarrow{AB} = délka úsečky AB , značení $|\overrightarrow{AB}|$.

Pokud platí $A = B$, splyne počáteční a koncový bod \Rightarrow nulová délka orientované úsečky \Rightarrow **nulová orientovaná úsečka**.

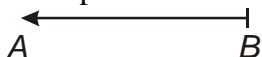
Př. 1: Je dána úsečka AB . Kolik různých orientovaných úseček je dáno body A, B ? Nakresli body A, B a vyznač všechny orientované úsečky, které je možné udat pomocí bodů A, B .

Body A, B jsou dány dvě orientované úsečky: \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{BA} \Rightarrow liší se počátečním a koncovým bodem.

- \overrightarrow{AB} - počáteční bod A , koncový bod B

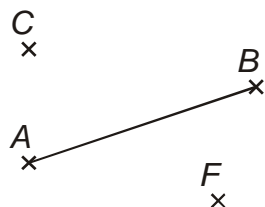


- \overrightarrow{BA} - počáteční bod B , koncový bod A

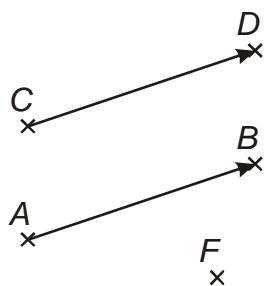


Př. 2: Je dána úsečka AB a body C, F , které neleží na přímce AB .

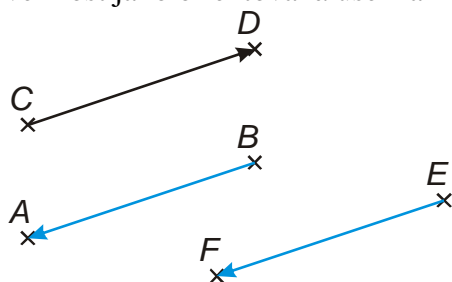
- Zakresli do obrázku bod D tak, aby orientovaná úsečka CD měla stejný směr a stejnou velikost jako orientovaná úsečka \overrightarrow{AB} .
- Zakresli do obrázku bod E tak, aby orientovaná úsečka EF měla stejný směr a stejnou velikost jako orientovaná úsečka \overrightarrow{BA} .



- Zakresli do obrázku bod D tak, aby orientovaná úsečka CD měla stejný směr a stejnou velikost jako orientovaná úsečka \overrightarrow{AB} .



b) Zakresli do obrázku bod E tak, aby orientovaná úsečka EF měla stejný směr a stejnou velikost jako orientovaná úsečka BA .



Dodatek: Orientovaná úsečka velmi úzce souvisí i s jedním pojmem, který zatím známe jen z fyziky - s vektorem. Na první pohled znamenají oba termíny to samé - šipku, která zachycuje velikost a směr, při bližším pohledu je však jasné, že orientovaná úsečka představuje pouze jedno z nekonečně mnoha umístění odpovídajícího vektorů. Známe totiž oba její krajní body a přináší nám tak informaci i o tom, kde konkrétně máme šipku představující velikost a směr nakreslit.

Pomocí orientované úsečky je definován další druh shodnosti – **posunutí**.

Je dána nenulová orientovaná úsečka AB . Posunutí (translace) je shodné zobrazení $T(AB)$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientovaná úsečka XX' má stejnou délku a stejný směr jako orientovaná úsečka AB .

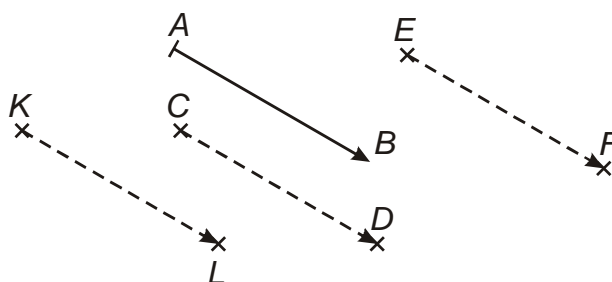
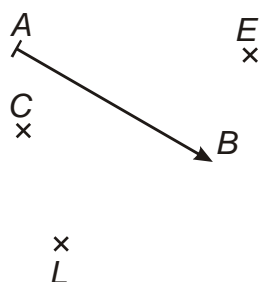
Př. 3: Je dána orientovaná úsečka AB a body C , E a L .

a) Najdi bod D , který je obrazem bodu C v posunutí $T(AB)$.

b) Najdi bod F , který je obrazem bodu E v posunutí $T(AB)$.

c) Najdi bod K tak, aby bod L byl obrazem bodu K v posunutí $T(AB)$.

Existují v posunutí $T(AB)$ samodružné body? Jaké je inverzní zobrazení k zobrazení $T(AB)$?



V posunutí $T(AB)$ neexistují samodružné body.

Inverzním zobrazením k posunutí $T(AB)$ je posunutí $T(BA)$. Platí $T^{-1}(AB) = T(BA)$.

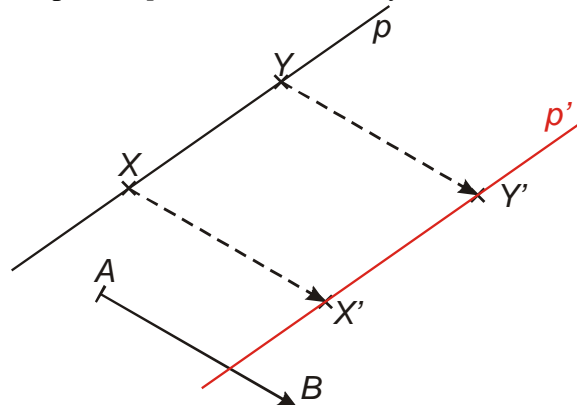
Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu budete možná překvapeni. Jak osovou tak středovou souměrnost studenti znají ze základní školy, ale o posunutí většinou neslyšeli. Proto zatím neví, jak mají obrazy konstruovat a měli by postupovat podle opsané definice. Bohužel se většinou ukáže, že nejsou schopni text modrého rámečku ani vnímat, natož podle něj postupovat (u předchozích zobrazení to nevadilo, protože postup na vytváření obrazů znali).

Chce to trochu času, ale po určitém přesvědčování se naprostě většině podaří první obrazy zdárně narýsovat.

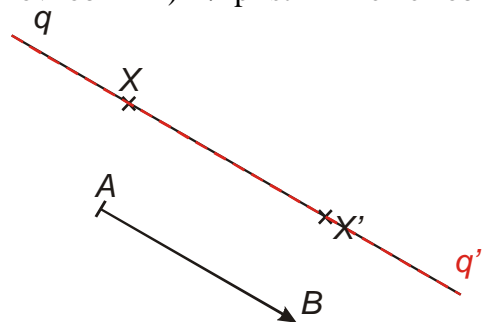
Studenti často nepřetou pořádně zadání a špatně rýsují bod c). Je třeba je upozornit, že chyba je právě v přečtení zadání a že předchozí body vyřešili správně (abyste je zbytečně neuváděli do zmatku).

Př. 4: Je dána orientovaná úsečka AB a přímky p a q . Přímka p je různoběžná s přímkou AB , přímka q je s přímkou AB rovnoběžná. Najdi obrazy obou přímek v posunutí $T(AB)$. Které přímky jsou v posunutí $T(AB)$ samodružné?

Na přímce p zvolíme dva body, zobrazíme a jejich obrazy spojíme přímkou.

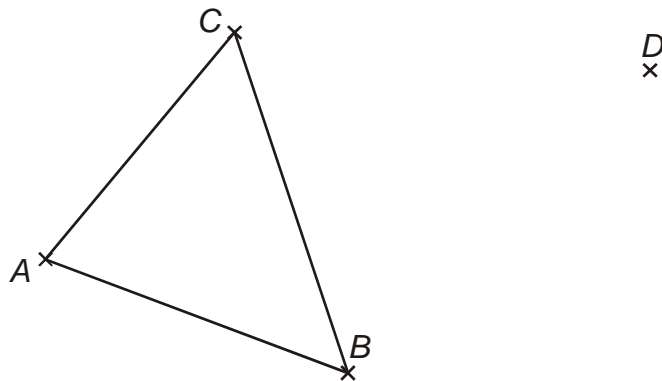


\Rightarrow V posunutí se každá přímka zobrazí na přímku rovnoběžnou (čtyřúhelník $XX'YY'$ je rovnoběžník) \Rightarrow příště můžeme zobrazit pouze jeden bod a vést jím rovnoběžku.

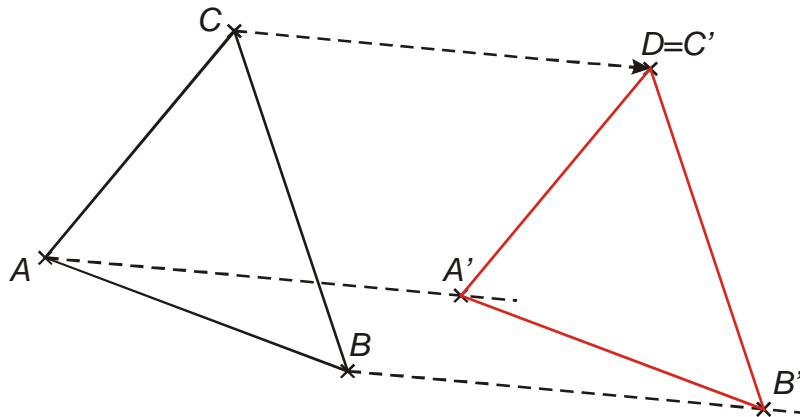


V posunutí $T(AB)$ jsou samodružné přímky rovnoběžné s úsečkou AB .

Př. 5: Je dán trojúhelník ABC a bod D ležící vně trojúhelníku. Kde bude ležet obraz bodu C v posunutí $T(CD)$? Narýsuj obraz trojúhelníku ABC v posunutí $T(CD)$. Je posunutí přímá nebo nepřímá shodnost?



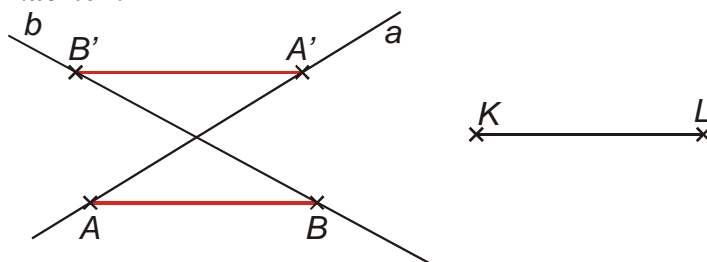
Bod C se v posunutí $T(CD)$ zobrazí do bodu D .



Posunutí je přímá shodnost.

Př. 6: Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka KL . Sestroj všechny úsečky AB rovnoběžné a shodné s úsečkou KL , tak aby platilo $A \in a, B \in b$.

Náčrtek:



Problém:

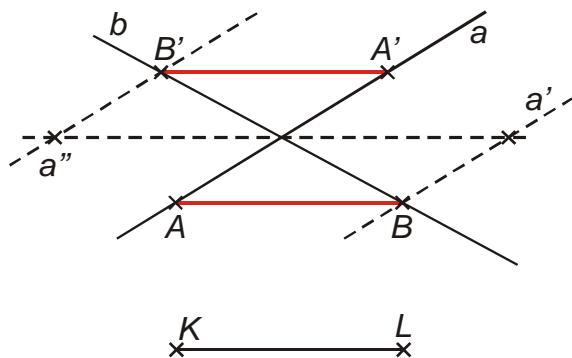
- Bod A leží na přímce a , ale nevíme kde,
- Bod B leží na přímce b , ale nevíme kde,

\Rightarrow máme dvě neúplné informace \Rightarrow hledáme spojitost mezi body A a B .

Řešení: Úsečka AB je shodná rovnoběžná s úsečkou $KL \Rightarrow$ bod B je obrazem bodu A v posunutí $T(KL)$ nebo $T(LK) \Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být A (celou přímku a), a zobrazíme je v posunutích $T(KL)$ a $T(LK)$. Správný bod A se zobrazí na bod B (tedy na bod na přímce b).

Konstrukce:

Zápis konstrukce:



1. $KL, a, b; a \parallel b$
2. $a'; T(KL): a \rightarrow a'$
3. $B; B = b \cap a'$
4. $A; T(LK): B \rightarrow A$
5. $a''; T(LK): a \rightarrow a''$
6. $B''; B'' = b \cap a''$
7. $A'; T(KL): B'' \rightarrow A'$
8. $AB; A'B'$

Rozbor:

Příklad má vždy dvě řešení.

Př. 7: Sestav matematicky ověřitelná pravidla, podle kterých bude možné rozhodnout, zda mají orientované úsečky \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{CD} stejnou orientaci.

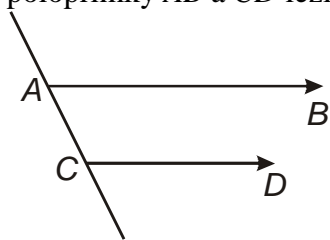
Orientované úsečky se stejnou orientací musí ležet na rovnoběžkách nebo na stejné přímce, ale jak zajistit, že šipky jdou na stejnou stranu?

Pokud leží na stejné přímce:

- polopřímka AB je částí polopřímky CD
 $\overline{C} \quad \overline{A} \quad \overline{D} \quad \overline{B}$
- polopřímka CD je částí polopřímky AB
 $\overline{A} \quad \overline{C} \quad \overline{B} \quad \overline{D}$
- polopřímky AB a CD splývají
 $\overline{A=C} \quad \overline{D} \quad \overline{B}$

Pokud leží na různých rovnoběžkách:

- polopřímky AB a CD leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad uvádí část studentů do rozpaků (je pro ně poměrně obtížné si představit, že by mohl být nějaký problém v tom, jak rozpoznat stejnou orientaci, když je to tak snadno „vidět“), snažím se ho tedy uvádět spíše jako zajímavost než něco, čím by se měli trápit, když to ihned nepochopí.

Shrnutí: Orientovaná úsečka určuje další druh shodnosti – posunutí.