

3.5.7 Příklady na posunutí

Předpoklady: 3506

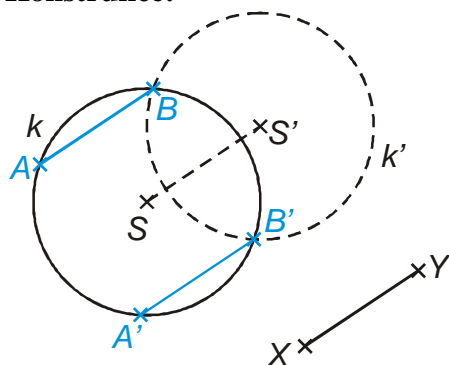
Př. 1: Je dána kružnice $k(S; r)$ a úsečka XY . Sestroj tětivu AB kružnice k shodnou a rovnoběžnou s úsečkou XY . Kdy je úloha řešitelná?

Co víme o hledaných bodech?

- bod A leží na kružnici k , ale nevíme kde,
- bod B leží na kružnici k , ale nevíme kde,

\Rightarrow klasický příklad na spojování dvou informací \Rightarrow hledáme pojítka mezi body A, B :
 tětiva AB má být shodná a rovnoběžná s úsečkou $XY \Rightarrow$ bod B je obrazem bodu A v posunutí $T(\mathbf{XY}) \Rightarrow$ zobrazíme všechny body, které mohou být A (kružnici k) v posunutí $T(\mathbf{XY})$, získáme kružnici k' , správný bod A poznáme tak, že se zobrazí do bodu B (tedy na kružnici k) \Rightarrow bod B najdeme jako průsečík kružnic k a k' .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $XY, k(S; r)$
2. $S'; T(\mathbf{AB}): S \rightarrow S'$
3. $k'(S'; r)$
4. $B; B \in k \cap k'$
5. $A; T(\mathbf{BA}): B \rightarrow A$
6. AB

Rozbor:

Úloha má:

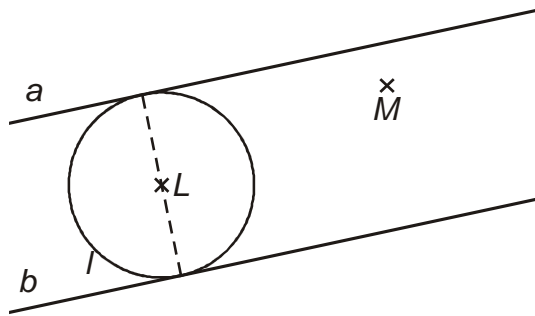
- 2 řešení pokud $|XY| < 2r$,
- 1 řešení pokud $|XY| = 2r$,
- 0 řešení pokud $|XY| > 2r$.

Př. 2: Jsou dány rovnoběžné přímky a, b a bod M ležící uvnitř pásu, který ohraničují. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b a prochází bodem M . Najdi řešení, které nevyužívá množiny bodů dané vlastnosti.

Problém: Hledaná kružnice musí splňovat příliš mnoho podmínek:

- dotyk s přímkou a ,
- dotyk s přímkou b ,
- průchod bodem M .

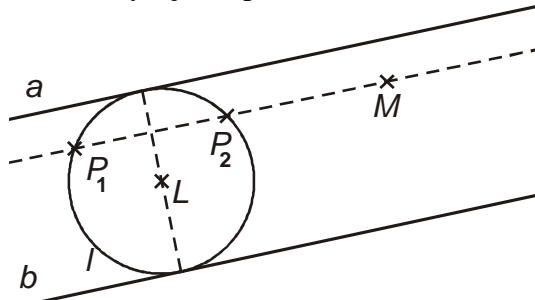
Splnění všech podmínek je obtížné \Rightarrow splníme jen některé podmínky ze zadání a s pomocí řešení, které splňuje některé podmínky, najdeme řešení splňující vše



Narýsovaná kružnice l splňuje podmínky dotyku s oběma přímkami, ale neprochází bodem M
 \Rightarrow správnou kružnici získáme posunutím ve směru přímky a (nebo b).

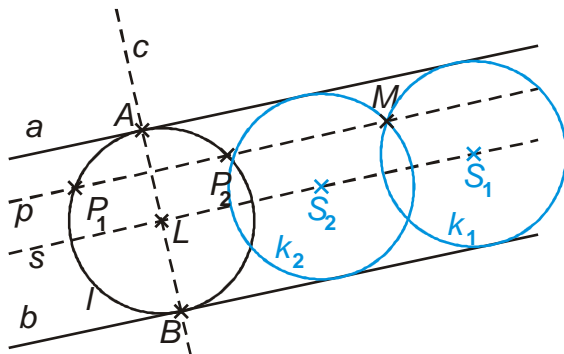
Problém: O jakou vzdálenost máme kružnici posunout?

Kružnici musíme posunout o takovou vzdálenost, aby se body na kružnici zobrazily do bodu M
 \Rightarrow narýsujeme přímku rovnoběžnou s přímkou a procházející bodem M .



\Rightarrow Správné řešení najdeme pokud kružnici l posuneme v posunutí $T(\mathbf{P}_1\mathbf{M})$ nebo $T(\mathbf{P}_2\mathbf{M})$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $M, a, b; a \parallel b$
2. $c; c \perp a$
3. $A; A = a \cap c; B; B = b \cap c$
4. $L; |LA| = |LB|$
5. $l(L; |LA|)$
6. $p; p \parallel a; M \in p$
7. $P_1, P_2; \{P_1, P_2\} \in p \cap l$
8. $S_1; T(\mathbf{P}_1\mathbf{M}): S \rightarrow S_1, S_2; T(\mathbf{P}_2\mathbf{M}): S \rightarrow S_2$
9. $k_1(S_1; |LA|); k_2(S_2; |LA|)$

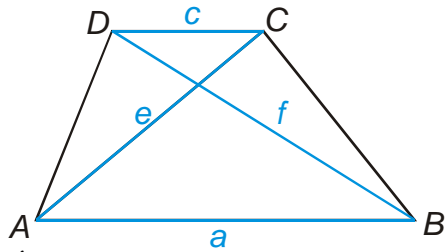
Rozbor: Příklad má vždy dvě řešení.

Pedagogická poznámka: I přes poslední větu v zadání se objeví žáci, kteří budou používat množiny bodů. Nedá se čekat, že by větší část třídy na řešení přišla samostatně.

Předchozí příklad je první ukázkou druhého častého typu úloh na zobrazení: máme najít útvar, který splňuje nějaké podmínky \Rightarrow nakreslíme podobný (shodný) útvar, který splňuje část podmínek (vybereme takovou část, aby konstrukce byla snadná) \Rightarrow pomocí zobrazení a nakresleného útvaru najdeme útvar, který splňuje všechny podmínky

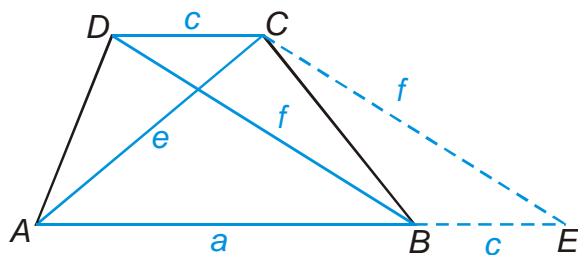
Př. 3: Sestroj lichoběžník $ABCD$, jsou-li délky obou jeho základů a, c a obou úhlopříček e, f .

Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

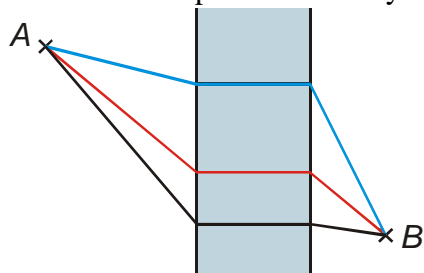
Problém: Zadané velikosti netvoří žádný trojúhelník, který bychom mohli začít sestavovat \Rightarrow zkusíme takový trojúhelník získat dokreslením \Rightarrow posuneme úhlopříčku f v posunutí $T(\mathbf{DC})$.



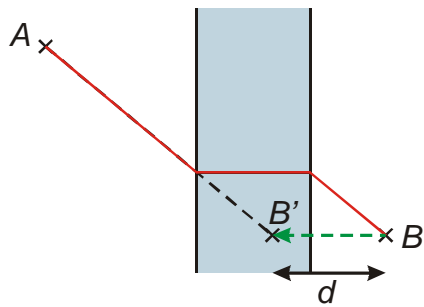
Řešení: Sestrojíme trojúhelník AEC , bod D najedeme pomocí rovnoběžky se stranou CE bodem B .

Př. 4: Vyhledej místo na řece šířky d , ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky, tak aby cesta z obce A do obce B , které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší. Předpokládej, že šířka řeky se v odpovídajícím úseku řeky nemění.

Most můžeme postavit v různých místech.



Délka mostu se nemění \Rightarrow o výhodnosti rozhoduje délka pozemních cest. Nejkratší spojnici dvou míst je přímka, ale mezi cestami se nachází most \Rightarrow cestu z bodu A do bodu B můžeme rozdělit na tři části, celková délka se nezmění, když změníme jejich pořadí \Rightarrow posuneme bod B k bodu A o délku mostu \Rightarrow obě části cesty se nacházejí vedle sebe \Rightarrow body A a B' můžeme spojit přímkou.



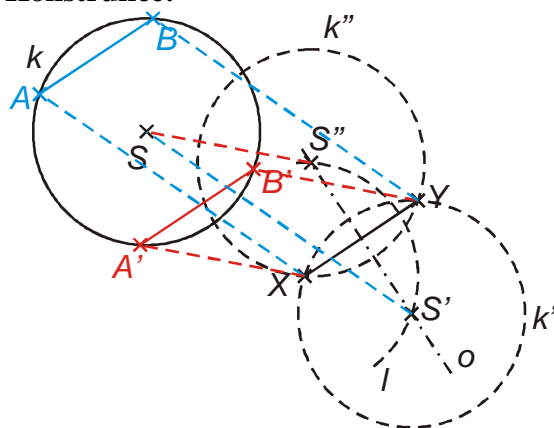
Př. 5: Najdi jiný způsob řešení příkladu 1 pomocí posunutí. Při tomto hledání využij filosofii řešení z příkladu 2.

Je dána kružnice $k(S; r)$ a úsečka XY . Sestroj tětivu AB kružnice k shodnou a rovnoběžnou s úsečkou XY . Kdy je úloha řešitelná?

Filosofie příkladu 2: Když je těžké splnit všechny podmínky najednou, splním jen některé a výsledek posunu na požadované místo \Rightarrow nemusím nakreslit řešení přesně tam, kde má být, stačí, že ho nakreslím na jiné místo odkud ho přesunu.

Kreslit úsečky s jedním bodem na kružnici však nepomáhá, stejně nevím, jak bod posunout. Jiný nápad: Když nejde nakreslit úsečku do kružnice, nakreslíme kružnici okolo úsečky a pak posuneme úsečky v opačném posunutí, než se posunula kružnice.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $XY, k(S; r)$
2. $l(X; r)$
3. o_{XY}
4. $S, S'; S \cup S' = l \cap o_{XY}$
5. $AB; T(S'S): XY \rightarrow AB$
6. $A'B'; T(S''S): XY \rightarrow A'B'$

Rozbor:

Úloha má:

- 2 řešení pokud $|XY| < 2r$,
- 1 řešení pokud $|XY| = 2r$,
- 0 řešení pokud $|XY| > 2r$.

Druhým častým typem úloh řešených pomocí zobrazení jsou úlohy, ve kterých splníme pouze část podmínek ze zadáním a vhodným shodným zobrazením pak úkol dokončíme.

Př. 6: Petáková:

strana 79/cvičení 36

strana 79/cvičení 41

strana 79/cvičení 47

Shrnutí: Při řešení některých příkladů můžeme nejdříve splnit pouze část zadaných podmínek a poté vhodným posunutím přesunout tento obrázek na správné místo.