3.5.7 Příklady na posunutí

Předpoklady: 3506

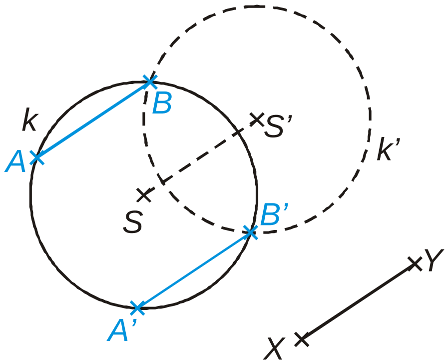
Př. 1: Je dána kružnice $k(S;r)$ a úsečka *XY*. Sestroj tětivu *AB* kružnice *k* shodnou a rovnoběžnou s úsečkou *XY*. Kdy je úloha řešitelná?

Co víme o hledaných bodech?

- bod *A* leží na kružnici *k*, ale nevíme kde,
- bod *B* leží na kružnici *k*, ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ klasický příklad na spojování dvou informací $\Rightarrow$ hledáme pojítko mezi body *A*, *B*: tětiva *AB* má být shodná a rovnoběžná s úsečkou *XY* $\Rightarrow$ bod *B* je obrazem bodu *A* v posunutí $T(\mathbf{XY})$ $\Rightarrow$ zobrazíme všechny body, které mohou být *A* (kružnici *k*) v posunutí $T(\mathbf{XY})$, získáme kružnici k', správný bod *A* poznáme tak, že se zobrazí do bodu *B* (tedy na kružnici *k*) $\Rightarrow$ bod *B* najdeme jako průsečík kružnic *k* a k'.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $XY, k(S;r)$
2. $S';T(\mathbf{AB}):S \to S'$
3. $k'(S';r)$
4. $B; B \in k \cap k'$
5. $A;T(\mathbf{BA}):B \to A$
6. AB

Rozbor:
Úloha má:

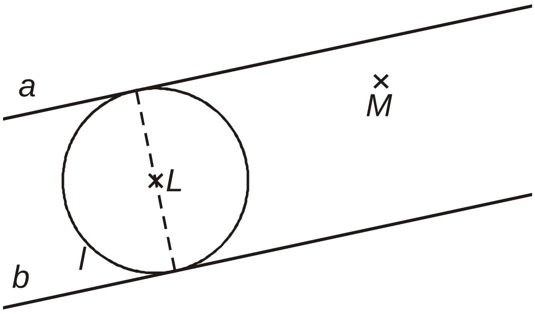
- 2 řešení pokud $|XY| < 2r$,
- 1 řešení pokud $|XY| = 2r$,
- 0 řešení pokud $|XT| > 2r$.

Př. 2: Jsou dány rovnoběžné přímky *a*, *b* a bod *M* ležící uvnitř pásu, který ohraničují. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají přímek *a*, *b* a prochází bodem *M*. Najdi řešení, které nevyužívá kružnici se středem v bodě *M*.

Problém: Hledaná kružnice musí splňovat příliš mnoho podmínek:

- dotyk s přímkou *a*,
- dotyk s přímkou *b*,
- průchod bodem *M*.

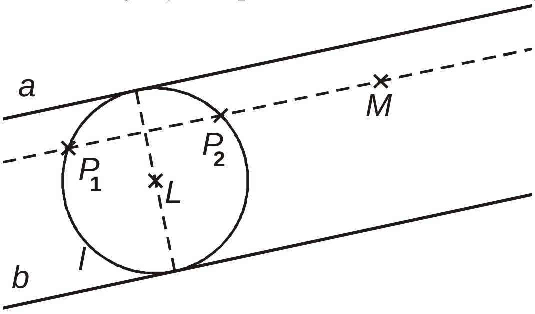
Splnění všech podmínek je obtížné $\Rightarrow$ splníme jen některé podmínky ze zadání a s pomocí řešení, které splňuje některé podmínky, najdeme řešení splňující vše.



Narýsovaná kružnice l splňuje podmínky dotyku s oběma přímkami, ale neprochází bodem M $\Rightarrow$ správnou kružnici získáme posunutím ve směru přímky a (nebo b).

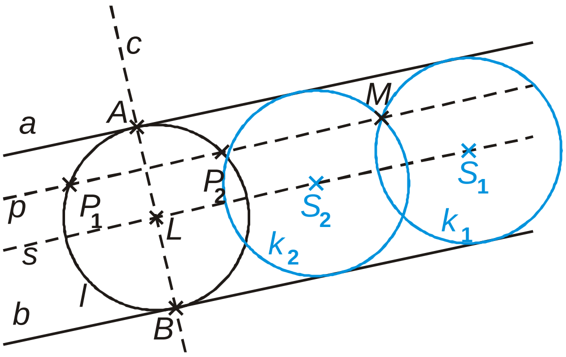
Problém: O jakou vzdálenost máme kružnici posunout?

Kružnici musíme posunout o takovou vzdálenost, aby se body na kružnici zobrazily do bodu M $\Rightarrow$ narýsujeme přímku rovnoběžnou s přímkou a procházející bodem M.



$\Rightarrow$ Správné řešení najdeme, pokud kružnici l posuneme v posunutí $T(\mathbf{P_1M})$ nebo $T(\mathbf{P_2M})$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $M, a, b; a \parallel b$
2. $c; c \perp a$
3. $A; A = a \cap c; B; B = b \cap c$
4. $L; |LA| = |LB|$
5. $l(L; |LA|)$
6. $p; p \parallel a; M \in p$
7. $P_1, P_2; \{P_1, P_2\} \in p \cap l$
8. $S_1; T(\mathbf{P_1M}): S \to S_1$, $S_2; T(\mathbf{P_2M}): S \to S_2$
9. $k_1(S_1; |LA|); k_2(S_2; |LA|)$

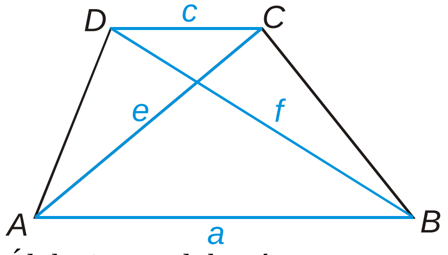
Rozbor: Příklad má vždy dvě řešení.

Pedagogická poznámka: I přes poslední větu v zadání se objeví žáci, kteří budou používat množiny bodů. Nedá se čekat, že by větší část třídy na řešení přišla samostatně.

Předchozí příklad je první ukázkou druhého častého typu úloh na zobrazení:
máme najít útvar, který splňuje nějaké podmínky $\Rightarrow$ nakreslíme podobný (shodný) útvar, který splňuje část podmínek (vybereme takovou část, aby konstrukce byla snadná) $\Rightarrow$ pomocí zobrazení a nakresleného útvaru najdeme útvar, který splňuje všechny podmínky

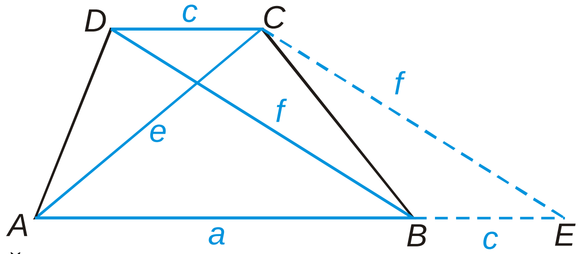
Př. 3: Sestroj lichoběžník *ABCD*, jsou-li délky obou jeho základen *a*, *c* a obou úhlopříček *e*, *f*.

Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

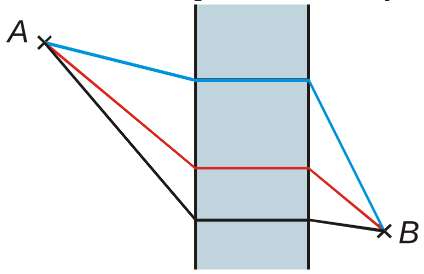
Problém: Zadané velikosti netvoří žádný trojúhelník, který bychom mohli začít sestrojovat $\Rightarrow$ zkusíme takový trojúhelník získat dokreslením $\Rightarrow$ posuneme úhlopříčku *f* v posunutí $T(\mathbf{DC})$.



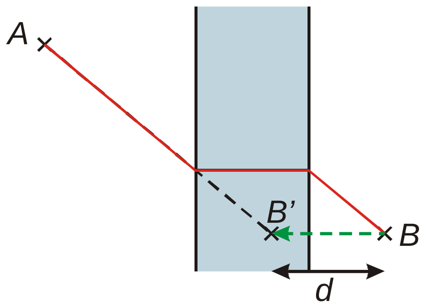
Řešení: Sestrojíme trojúhelník *AEC*, bod *D* najedeme pomocí rovnoběžky se stranou *CE* bodem *B*.

Př. 4: Vyhledej místo na řece šířky *d*, ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky, tak aby cesta z obce *A* do obce *B*, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší. Předpokládej, že šířka řeky se v odpovídajícím úseku řeky nemění.

Most můžeme postavit v různých místech.



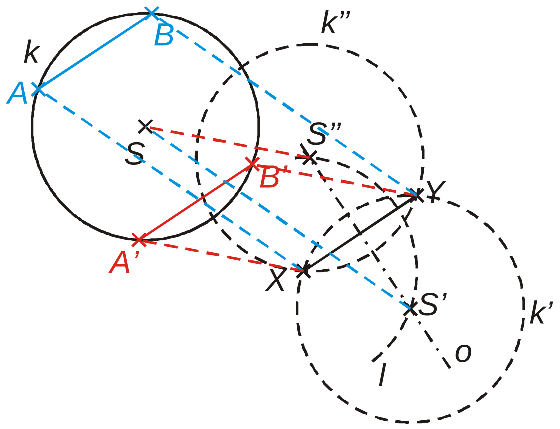
Délka mostu se nemění $\Rightarrow$ o výhodnosti rozhoduje délka pozemních cest. Nejkratší spojnicí dvou míst je přímka, ale mezi cestami se nachází most $\Rightarrow$ cestu z bodu *A* do bodu *B* můžeme rozdělit na tři části, celková délka se nezmění, když změníme jejich pořadí $\Rightarrow$ posuneme bod *B* k bodu *A* o délku mostu $\Rightarrow$ obě části cesty se nacházejí vedle sebe $\Rightarrow$ body *A* a B' můžeme spojit přímkou.



Př. 5: Najdi jiný způsob řešení příkladu 1 pomocí posunutí. Při tomto hledání využij filosofii řešení z příkladu 2.
Je dána kružnice $k(S;r)$ a úsečka XY. Sestroj tětivu AB kružnice k shodnou a rovnoběžnou s úsečkou XY. Kdy je úloha řešitelná?

Filosofie příkladu 2: Když je těžké splnit všechny podmínky najednou, splním jen některé a výsledek posunu na požadované místo $\Rightarrow$ nemusím nakreslit řešení přesně tam, kde má být, stačí, že ho nakreslím na jiné místo, odkud ho přesunu.
Kreslit úsečky s jedním bodem na kružnici však nepomáhá, stejně nevím, jak bod posunout.
Jiný nápad: Když nejde nakreslit úsečku do kružnice, nakreslíme kružnici okolo úsečky a pak posuneme úsečky v opačném posunutí, než se posunula kružnice.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:
1. $XY, k(S;r)$
2. $l(X;r)$
3. o_{XY}
4. $S, S'; S \cup S' = l \cap o_{XY}$
5. $AB; T(\mathbf{S'S}): XY \to AB$
6. $A'B'; T(\mathbf{S''S}): XY \to A'B'$

Rozbor:
Úloha má:
- 2 řešení pokud $|XY| < 2r$,
- 1 řešení pokud $|XY| = 2r$,
- 0 řešení pokud $|XT| > 2r$.

Druhým častým typem úloh řešených pomocí zobrazení jsou úlohy, ve kterých splníme pouze část podmínek ze zadáním a vhodným shodným zobrazením pak úkol dokončíme.

Př. 6: Petáková:
strana 79/cvičení 36
strana 79/cvičení 41
strana 79/cvičení 47

Shrnutí: Při řešení některých příkladů můžeme nejdříve splnit pouze část zadaných podmínek a poté vhodným posunutím přesunout tento obrázek na správné místo.