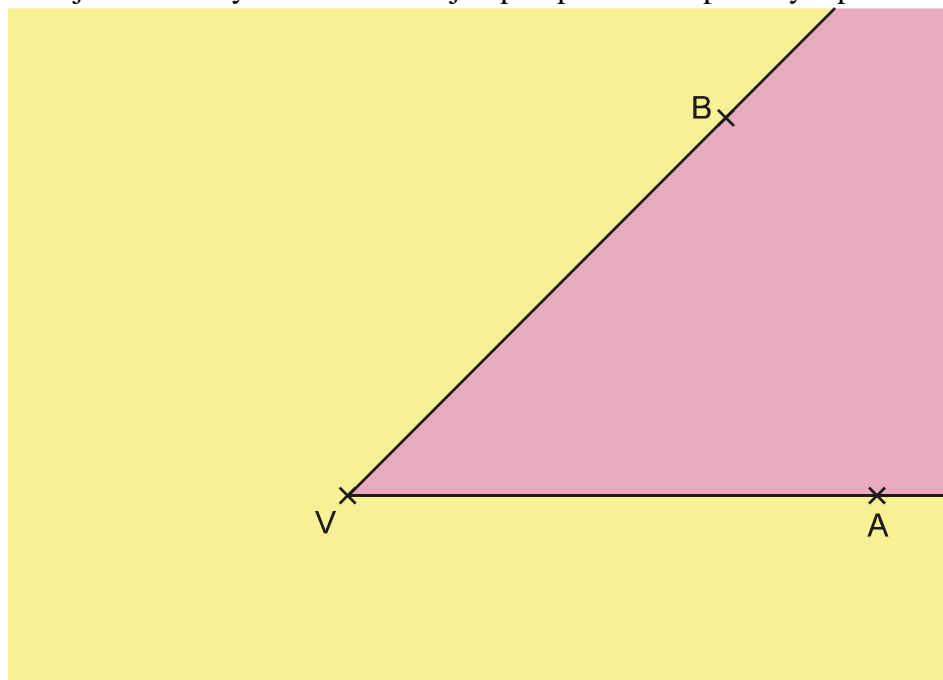


3.4.8 Otočení

Předpoklady: 030406

Definice úhlu ze základní školy:

Úhel je část roviny ohraničená dvojicí polopřímek se společným počátečním bodem.



Nevýhody této definice:

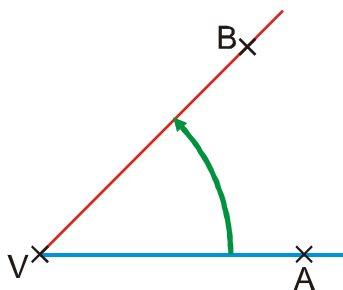
- Nevíme, jaký úhel máme na mysli (konvexní - růžový nebo nekonvexní - žlutý?)
- Když chceme pomocí úhlu popsat otáčení, nevíme, co jak točit (Máme točit o 45° po nebo proti směru hodinových ručiček?)

Oba problémy řeší novinka: **Orientovaný úhel.**

- **Uspořádaná dvojice polopřímek** (VA, VB) se společným počátkem V .

- Píšeme: \widehat{AVB} (VA - počáteční rameno, VB - koncové rameno, V = vrchol)

\Rightarrow Úhel vznikne otočením polopřímky z polohy počátečního ramena do polohy koncového ramena.



Dále budeme značit: počáteční rameno modře, konečné červeně. Směr otáčení bude vyznačen šipkou.

Pokud máme jednoznačně nakreslit $\widehat{AVB} = 30^\circ$, musíme vědět, co je kladný a co záporný směr otáčení \Rightarrow

- Za kladné považujeme otáčení proti směru hodinových ručiček.
- Za záporné považujeme otáčení po směru hodinových ručiček.

Nyní můžeme jednoznačně zavést **základní velikost úhlu**:

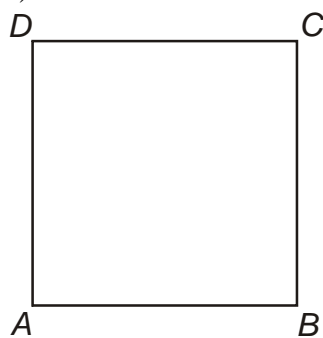
- Základní velikost orientovaného úhlu \widehat{AVB} je velikost úhlu, který vytvoří počáteční rameno nejkratším otočením do koncového ramena v kladném smyslu.
- Vždy jde o číslo v intervalu $\langle 0; 360^\circ \rangle$ (případně v obloukové míře $\langle 0; 2\pi \rangle$).

Př. 1: Na obrázku je nakreslen čtverec $ABCD$. Urči základní velikost úhlů:

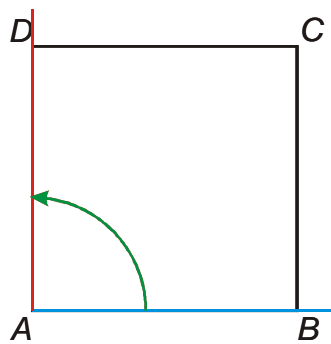
a) \widehat{BAD}

b) \widehat{ABC}

c) \widehat{CDA}

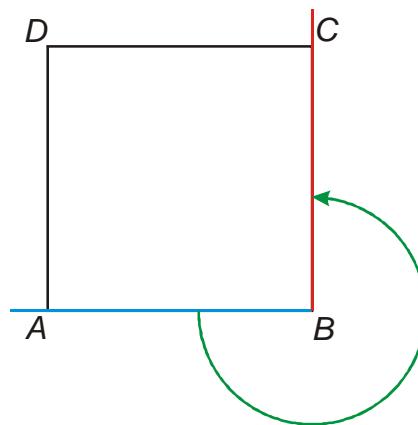


a) \widehat{BAD}



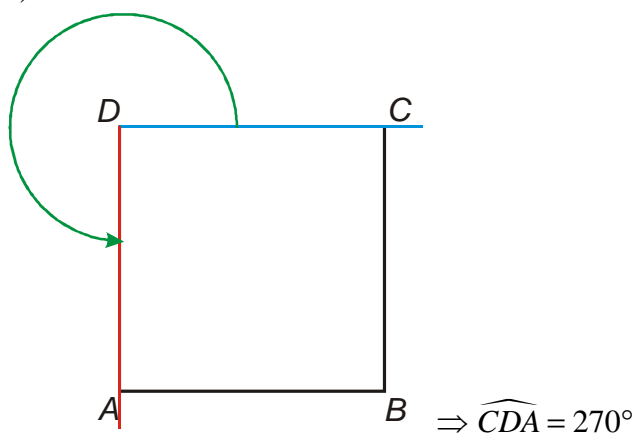
$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$$

b) \widehat{ABC}



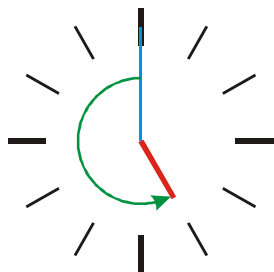
$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 270^\circ$$

c) \widehat{CDA}



Kromě základní velikosti (která je určena jednoznačně) má orientovaný úhel nekonečně mnoho dalších velikostí, které se od základní velikosti i od sebe navzájem liší o násobky 360° . Například jednou z velikostí úhlu \widehat{CDA} z předchozího příkladu je -90° (otočím počáteční rameno do koncového o 90° ve směru hodinových ručiček, tedy v záporném směru).

Př. 2: Urči velikost orientovaného úhlu, který svírá velká ručička (počáteční rameno) a malá ručička (koncové rameno) v pět hodin.

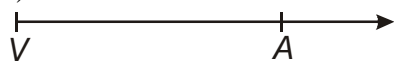


Počáteční rameno by se do koncového otočilo po dráze $12 \Rightarrow 9 \Rightarrow 6 \Rightarrow 5$, tedy $\alpha = 7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$.

Př. 3: Je dána polopřímka VA. Sestroj orientovaný úhel:

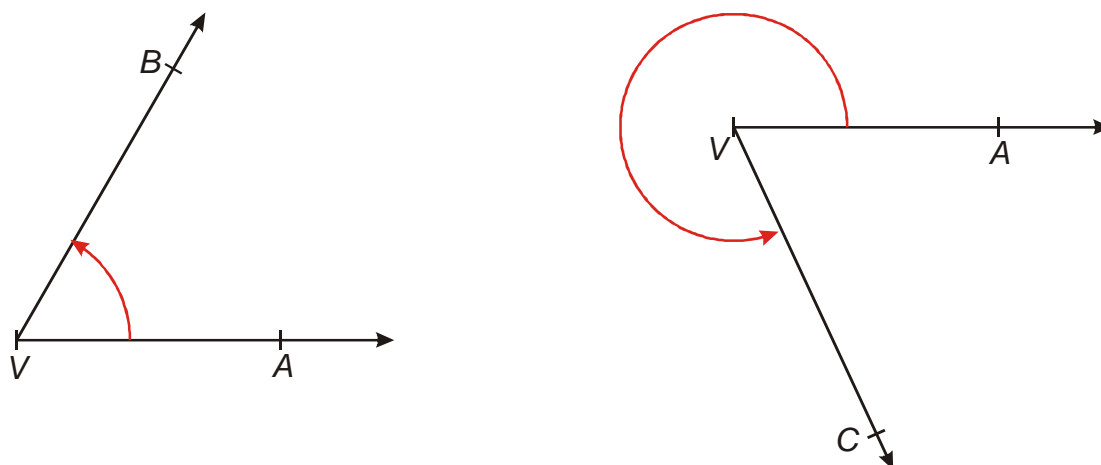
a) $\widehat{AVB} = 60^\circ$

b) $\widehat{AVC} = 295^\circ$



a) $\widehat{AVB} = 60^\circ$

b) $\widehat{AVC} = 295^\circ$



Pedagogická poznámka: Najdou se studenti, kteří mají problém s tím, že jejich úhlooměry mají stupnici pouze do 180° . Když však není zbytí a ujistíte je, že úhel 295° jde narysovat i s úhlooměrem do 180° , nakonec si s tím poradí.

Definice:

Je dán orientovaný úhel o velikosti φ a bod S . Otočení (rotace) je shodné zobrazení $R(S; \varphi)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ má velikost φ .
2. bodu S bod $S' = S$.

Terminologie:

- S – střed otočení,
- φ - úhel otočení.

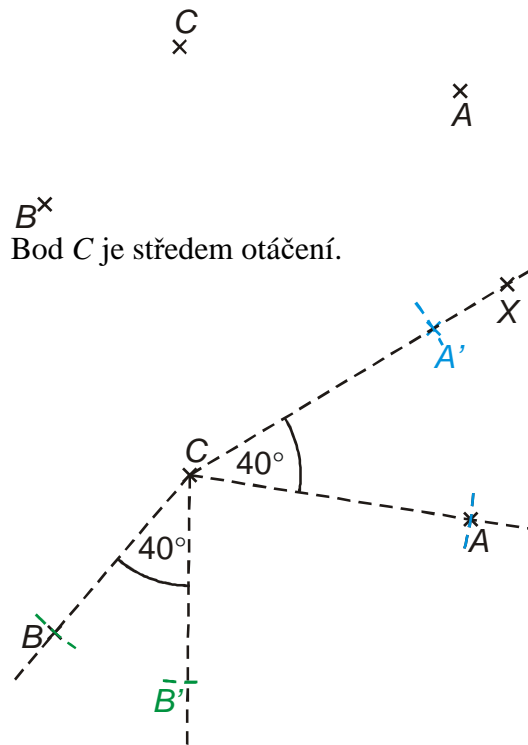
Př. 4: Rozhodni zda v zobrazení $R(S; \varphi)$ existují samodružné body.

Záleží na úhlu otočení:

- $\varphi = 0 + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z}$ (otáčíme o násobky 360°): všechny body jsou samodružné,
- $\varphi \neq 0 + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z}$: jediným samodružným bodem je bod S .

Pedagogická poznámka: Příklad je před první rýsování zařazen schválně, aby si studenti zkusili představit výsledky rýsování. Výsledek příkladu mohou získat i tím, že si zkusí otočit papírem.

Př. 5: Jsou dány různé body A, B, C , které neleží na jedné přímce. Najdi obrazy bodů A, B v zobrazení $R(C; 40^\circ)$.



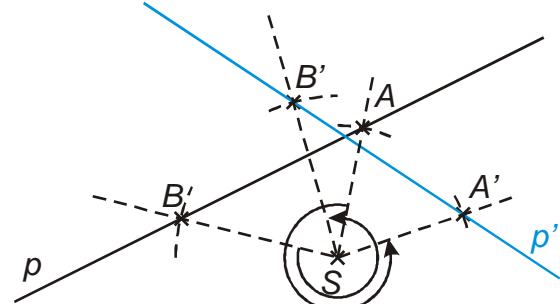
Zápis konstrukce:

1. $A; B; C$
 2. $\mapsto CX; |\widehat{ACX}| = 40^\circ$
 3. $A'; A' \in \mapsto CX; |A'C| = |AC|$
 4. $B'; R(C; 40^\circ): B \rightarrow B'$
- (pro bod A je konstrukce rozepsána na základní kroky, pro bod B je zapsána pomocí zkratky pro otočení)

Pedagogická poznámka: Úspěšnost řešení je podstatně větší než u prvního rýsování v hodině o posunutí, přesto se určitě najde několik nesmyslných obrázků. Nejdříve si musíme vyjasnit, který bod hraje roli středu a že bod B nemá na konstrukci bodu A' žádný vliv (jedna z nejhlubších mylných představ, že všechno zadané je pořád potřeba). Pak se snažím se studenty projít definici a postupně plnit její body.

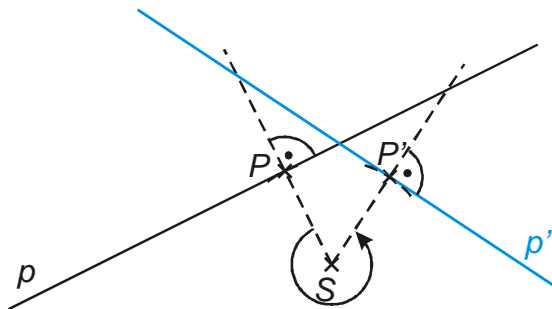
Př. 6: Je dán bod S a přímka p tak, že $S \notin p$. Narýsuj obraz přímky p v otočení $R(S; 300^\circ)$. Najdi co nejrychlejší řešení.

Obraz přímky můžeme najít pomocí dvou libovolných bodů A, B (samozřejmě mohou mít i jiná jména). Najdeme jejich obrazy, které nám určí přímku p' .



Uvedený postup je zdlouhavý – musíme konstruovat obrazy dvou bodů.

Na přímce p zvolíme speciální bod – patu kolmice z bodu S .

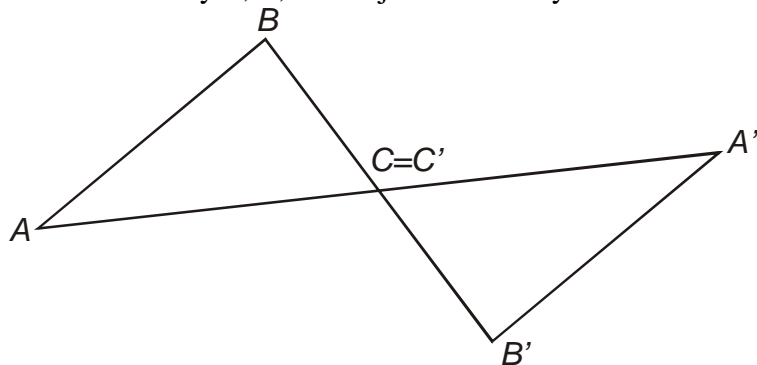


Protože otočení je shodné zobrazení, zachovává úhly \Rightarrow přímkou p' můžeme sestavit jako kolmici na polopřímku SP' v bodě P' .

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že počet studentů, kteří zobrazování přímky pomocí paty kolmice samostatně objeví, je značně menší, než těch, kteří tento způsob objevili u středové souměrnosti. Značné množství studentů má problémy i s prvním způsobem. Těm je třeba opakovat základní jistotu, že přímka je určena dvěma body a otáčení bodů už ovládají.

Př. 7: Je dán trojúhelník ABC . Sestroj obraz trojúhelníku v zobrazení $R(C; 180^\circ)$. Najdi zobrazení, které přiřazuje trojúhelníku stejný obraz.

Zobrazíme body A, B , bod C je samodružný.



Získali jsme stejný obraz jako ve středové souměrnosti $S(C) \Rightarrow$ středová souměrnost je otočení o 180° (platí $S(S) = R(S; 180^\circ)$).

Shrnutí: U orientovaného úhlu rozlišujeme počáteční a koncové rameno. Směr otáčení proti směru hodinových ručiček považujeme za kladný.